CINEMATIQUE

Objectifs :

- Déterminer la trajectoire, calculer le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'un point particulier d'un mécanisme préalablement modélisé et paramétré.
- Caractériser la vitesse d'un solide par un torseur et établir les relations entre les torseurs cinématiques de solides en mouvement relatif.

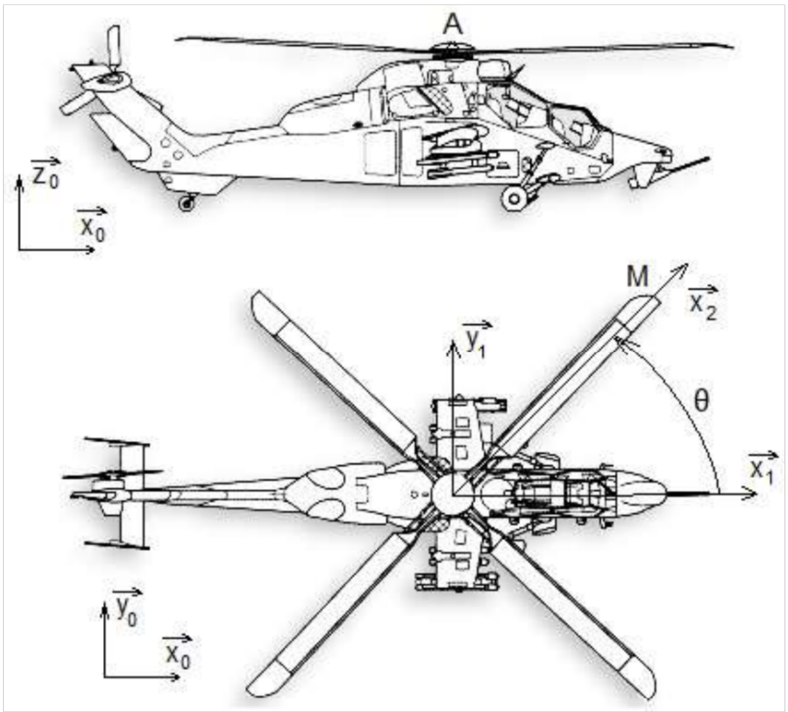
Problématiques :

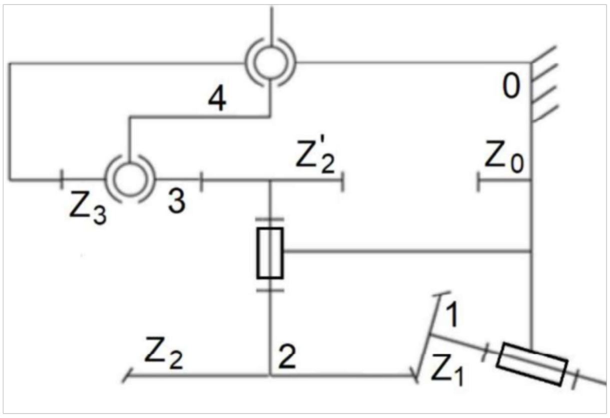
- Valider des performances cinématiques d'un système relativement à un cahier des charges.

1 Mise en situation

On considère un hélicoptère Tigre se déplaçant en translation selon un axe $\overrightarrow{x_0}$ à une vitesse V constante par rapport au sol (V > 0). Le mouvement de rotation des pales est créé par une turbomachine. Un réducteur, situé à sa sortie, en diminue la vitesse (tout en augmentant le couple). Un renvoi d'angle transmet cette rotation aux pales du rotor principal, en changeant au passage l'axe de rotation (d'horizontal, il devient vertical).

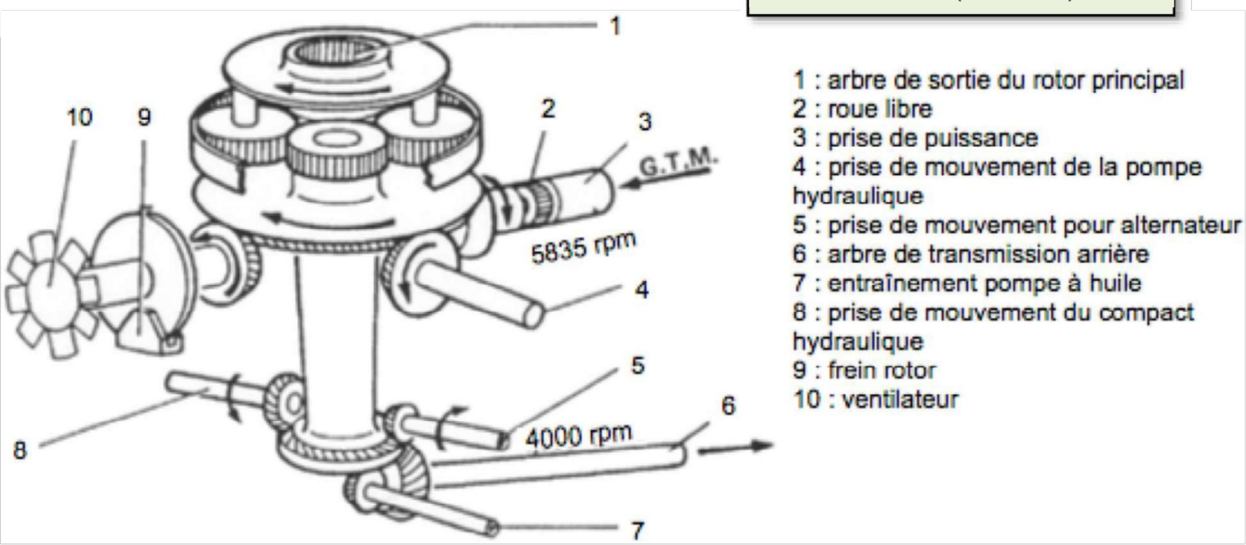
Problématique : l'exigence id = « 1.1 » est-elle satisfaite ?





« requirement »
Ne pas atteindre le mur du son

Id = ''1.1''
Text = ''La vitesse linéaire maximale atteinte par les pales ne doit pas atteindre 85% de la vitesse du son (330 m/s).''



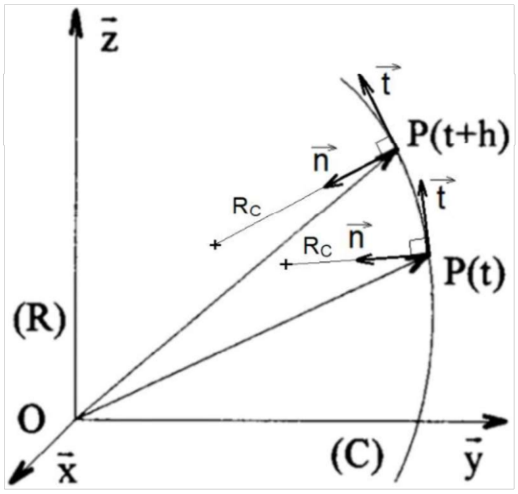
2 Cinématique du point

2.1 Vecteur position & trajectoire par rapport à un repère

Pour noter l'évolution d'un mécanisme, un observateur a besoin d'un système de référence constitué :

- D'un espace physique, auquel on associe un repère orthonormé direct à 3 dimensions, $\mathrm{R}\ (\mathrm{O}, \vec{\mathrm{x}}, \vec{\mathrm{y}}, \vec{\mathrm{z}})$.
- Du temps, qui est le même pour tous les observateurs en mécanique classique ou Newtonienne.

Le vecteur position du point P(t) du solide (S) dans le repère R, à la date t (unité : seconde), est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP(t)}}$, où O est l'origine du repère R. Ce vecteur pourra s'écrire en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques en fonction du problème étudié.



Soit $\overrightarrow{\mathrm{OP(t)}} = \mathrm{a}.\vec{\mathrm{x}} + \mathrm{b}.\vec{\mathrm{y}} + \mathrm{c}.\vec{\mathrm{z}}$ où a, b et c sont des fonctions de t. $\mathrm{a} = \mathrm{a(t)}$, $\mathrm{b} = \mathrm{b(t)}$, $\mathrm{c} = \mathrm{c(t)}$ sont les équations paramétriques du mouvement.

La trajectoire, notée (C), du point P(t) dans le repère R est l'ensemble des points P(t) obtenus lorsque t varie (positions successives). Elle pourra être différente en fonction du repère choisi.

On définit $\vec{\mathrm{t}}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire à chaque instant (orienté avec t croissant) et $\vec{\mathrm{n}}$ un vecteur unitaire normal à la trajectoire (donc à $\vec{\mathrm{t}}$), dirigé vers le centre de courbure (centre instantané du mouvement, noté CIR), de rayon de courbure $\mathrm{R_C}$ différent à chaque instant (orienté vers l'intérieur de la trajectoire).

On suppose le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP(t)}}$ deux fois dérivable, à dérivée première et seconde continues par intervalles.

2.2 Vecteur vitesse instantanée par rapport à un repère

Le vecteur vitesse instantanée d'un point mobile P, à l'instant t, par rapport à un repère est la dérivée du vecteur position par rapport à la variable t dans le repère choisi. Exemples :

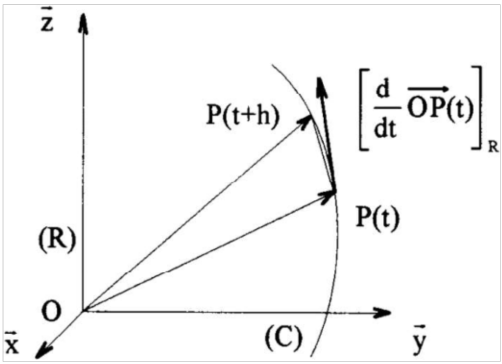
$$\overrightarrow{\mathrm{V_{P/R}}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_{\mathrm{R}}$$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V_{P/R}}} = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R}) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_{\mathrm{R}}}$: vecteur vitesse instantanée du point P, dans le repère $\mathrm{R}\ (\mathrm{O}, \vec{\mathrm{x}}, \vec{\mathrm{y}}, \vec{\mathrm{z}})$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_{\mathrm{R}} \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\right]_{\mathrm{R_1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{V_{P/R_1}}} = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R_1}) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\right]_{\mathrm{R_1}}$: vecteur vitesse instantanée du point P, dans le repère $\mathrm{R_1}(\mathrm{O_1}; \overrightarrow{\mathrm{x_1}}, \overrightarrow{\mathrm{y_1}}, \overrightarrow{\mathrm{z_1}})$

Avec par définition : $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right]_{\mathrm{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{R}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP(t+\Delta t)}} - \overrightarrow{\mathrm{OP(t)}}}{\Delta t}$, vecteur tangent au point P(t) à la trajectoire (C) ; cette relation n'est utilisée de manière concrète que pour les calculs utilisant des méthodes numériques.



Propriétés (quel que soit $\vec{\mathrm{V}}$, $\overrightarrow{\mathrm{V_1}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V_2}}$: distance, vitesse, accélération) :

$$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_1}} + \overrightarrow{\mathrm{V_2}})\right]_{\mathrm{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{V_1}}\right]_{\mathrm{R}} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{V_2}}\right]_{\mathrm{R}}}$$

$$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\lambda . \vec{\mathrm{V}})\right]_{\mathrm{R}} = \dot{\lambda} . \vec{\mathrm{V}} + \lambda . \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{V}}\right]_{\mathrm{R}} \text{ avec : } \dot{\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\lambda}$$

$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\mathrm{V(\theta(t))}}\right]_{\mathrm{R}} = \dot{\theta} . \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\theta}}\overrightarrow{\mathrm{V(\theta(t))}}\right]_{\mathrm{R}}}$; exemples : $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sin(\theta) . \vec{\mathrm{x}}\right]_{\mathrm{R}} = \dot{\theta} . \cos(\theta) . \vec{\mathrm{x}}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\cos(\theta) . \vec{\mathrm{x}}\right]_{\mathrm{R}} = -\dot{\theta} . \sin(\theta) . \vec{\mathrm{x}}$

$\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_1}} . \overrightarrow{\mathrm{V_2}})\right]_{\mathrm{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_1}})\right]_{\mathrm{R}} . \overrightarrow{\mathrm{V_2}} + \overrightarrow{\mathrm{V_1}} . \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_2}})\right]_{\mathrm{R}}}$ $\quad$ $\boxed{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_1}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_2}})\right]_{\mathrm{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_1}})\right]_{\mathrm{R}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_2}} + \overrightarrow{\mathrm{V_1}} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{\mathrm{V_2}})\right]_{\mathrm{R}}}$

2.2.1 Dérivée d'un vecteur vitesse instantanée exprimé dans la base de dérivation

Soit R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$; $\overrightarrow{V_{P/R}} = \vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R$

Avec : $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}(a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z})\right]_R = a.\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{x}.\frac{d}{dt}a(t) + b.\frac{d\vec{y}}{dt} + \vec{y}.\frac{d}{dt}b(t) + c.\frac{d\vec{z}}{dt} + \vec{z}.\frac{d}{dt}c(t)$

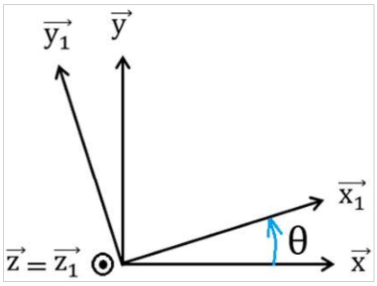
$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}(a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z})\right]_R = \vec{x}.\frac{d}{dt}a(t) + \vec{y}.\frac{d}{dt}b(t) + \vec{z}.\frac{d}{dt}c(t) = \dot{a}.\vec{x} + \dot{b}.\vec{y} + \dot{c}.\vec{z}$

Avec : $\dot{a} = \dot{a}(t) = \frac{d}{dt}a(t)$, $\dot{b} = \dot{b}(t) = \frac{d}{dt}b(t)$, $\dot{c} = \dot{c}(t) = \frac{d}{dt}c(t)$

Résumé : Soit R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$ alors $\overrightarrow{V_{P/R}} = \vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \dot{a}.\vec{x} + \dot{b}.\vec{y} + \dot{c}.\vec{z}$

Le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est exprimé dans la même base que celle de dérivation, les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont constants dans R et ainsi ne varie pas avec t.

2.2.2 Dérivée d'un vecteur vitesse instantané exprimé dans une autre base que celle de dérivation



Soit R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $R_1(O_1;\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ avec $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x_1} + b.\vec{y_1} + c.\vec{z_1}$; $\overrightarrow{V_{P/R}} = \vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R$

On se place dans le cas particulier du schéma suivant avec $\vec{z} = \vec{z_1}$, que l'on généralisera. On pose : $\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}.\vec{z_1}\ (= \dot{\theta}.\vec{z})}$

$\vec{\Omega}(R_1/R)$ est par définition le vecteur vitesse instantanée de rotation de R_1 par rapport à R. Pour le déterminer, on cherche l'angle qui va de R vers R_1

Propriétés du vecteur rotation : $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_1) = -\vec{\Omega}(R_1/R_2)}$ et $\boxed{\vec{\Omega}(R_n/R_1) = \sum_{i=2}^{n}\vec{\Omega}(R_i/R_{i-1})}$

On définit la formule de la base mobile, relation fondamentale de la cinématique :

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OP}}$$

Cette relation est valable quel que soit le vecteur cinématique $\overrightarrow{OP}$ (l'image d'une distance, d'une vitesse ou d'une accélération). On remplace ainsi une dérivation vectorielle par un simple produit vectoriel dans le cas où le vecteur à dériver est constant dans R_1, ce qui est le cas ici puisque $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x_1} + b.\vec{y_1} + c.\vec{z_1}$ avec :

$\overrightarrow{V_{P/R_1}} = \vec{V}(P/R_1) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_1} = \dot{a}.\vec{x_1} + \dot{b}.\vec{y_1} + \dot{c}.\vec{z_1}$; on est dans le cas du paragraphe précédent.

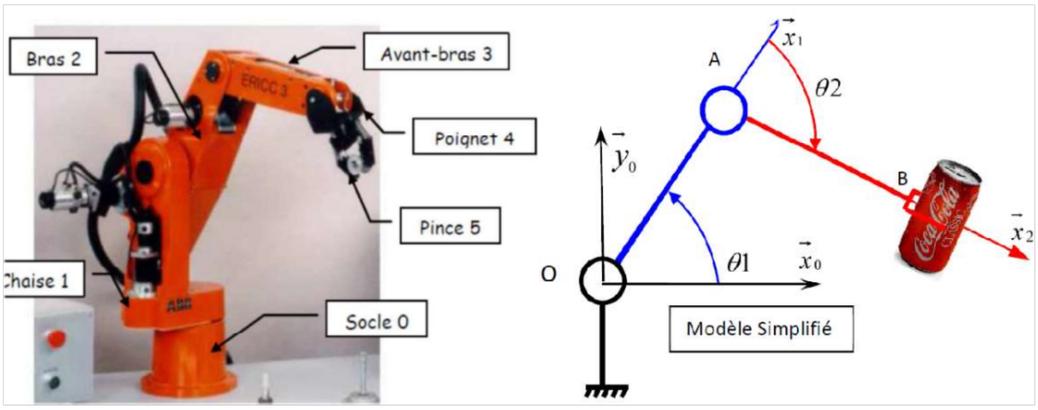
Résumé : Soit R $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, $R_1(O_1;\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ et $\overrightarrow{OP} = a.\vec{x_1} + b.\vec{y_1} + c.\vec{z_1}$ alors $\overrightarrow{V_{P/R}} = \vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R$
Avec : $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OP} = \dot{a}.\vec{x_1} + \dot{b}.\vec{y_1} + \dot{c}.\vec{z_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (a.\vec{x_1} + b.\vec{y_1} + c.\vec{z_1})$

- Calculer une vitesse par rapport à un repère ne veut pas dire exprimer cette vitesse dans la base liée à ce repère
- Ne pas confondre base de dérivation et base de projection du vecteur
- Quand on dérive un vecteur par rapport au temps (quel que soit le vecteur : une distance, une vitesse, une accélération, etc…), on ne le projette pas, on utilise impérativement la formule de la base mobile

Dans le cas général d'un paramétrage par les angles d'Euler (ou 3 angles pour définir la rotation de R_1 par rapport à R), le principe reste inchangé et on a : $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\psi}.\vec{k} + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\vec{k_1}$

Exercice 1 : Bras de robot

On considère le modèle plan simplifié dans lequel la pince de robot n'est animée que par deux mouvements de rotation paramétré θ_1 et θ_2. Chaque bras du robot est de longueur L. Le point B en bout de chaine a comme coordonnées x_B et y_B dans le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$



On rappelle les résultats trouvés pour le modèle géométrique : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = L.\vec{x_1} + L.\vec{x_2}$ et dans R_0 :

$\overrightarrow{OB} = [L.\cos(\theta_1) + L.\cos(\theta_1).\cos(\theta_2) - L.\sin(\theta_1).\sin(\theta_2)].\vec{x_0} + [L.\sin(\theta_1) + L.\sin(\theta_1).\cos(\theta_2) + L.\cos(\theta_1).\sin(\theta_2)].\vec{y_0}$

1 – Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B/R0}}$ à partir de la première relation $\overrightarrow{OB} = L.\vec{x_1} + L.\vec{x_2}$

2 – Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B/R}}$ à partir de la deuxième relation de $\overrightarrow{OB}$

2.3 Vecteur accélération instantanée par rapport à un repère

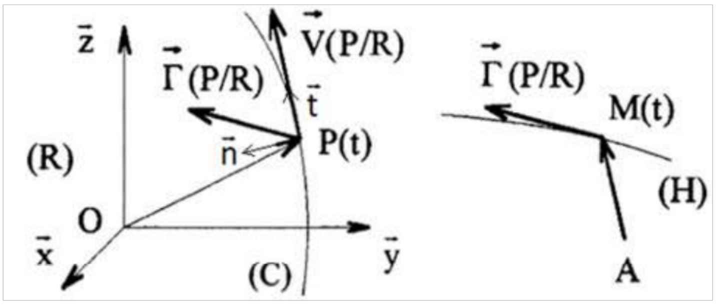
Par analogie avec le vecteur vitesse instantanée, le vecteur accélération instantanée d'un point mobile P, à l'instant t, par rapport à un repère est la dérivée du vecteur vitesse par rapport à la variable t dans le repère choisi. Exemples :

$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} = \vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R}$: vecteur accélération instantanée du point P, dans le repère $R\ (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$\overrightarrow{\Gamma_{P/R_1}} = \vec{\Gamma}(P/R_1) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{P/R_1}}\right]_{R_1}$: vecteur accélération instantanée du point P, dans le repère $R_1(O_1;\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$

Avec par définition :

$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{P/R}}}{dt}\right]_R = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\overrightarrow{V_{P(t+\Delta t)/R}} - \overrightarrow{V_{P(t)/R}}}{\Delta t}\right)_R$, vecteur tangent au point M(t) à la trajectoire (H) de M dans R (appelée hodographe) avec $\overrightarrow{AM}(t) = \vec{V}(P/R)$; cette relation n'est utilisée de manière concrète que pour les calculs utilisant des méthodes numériques.



On a : $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} = A(t).\vec{x} + B(t).\vec{y} + C(t).\vec{z}$; mais on peut aussi définir : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} = \gamma_t.\vec{t} + \gamma_n.\vec{n}}$

- $\boxed{\text{L'accélération tangentielle : } \overrightarrow{\Gamma_{P/R}}.\vec{t} = \gamma_t\ (= \gamma_t(t))}$
- $\boxed{\text{L'accélération normale : } \overrightarrow{\Gamma_{P/R}}.\vec{n} = \gamma_n\ (= \gamma_n(t))}$
- Le rayon de courbure instantané de la trajectoire : $\boxed{R_C(=\rho) = \frac{\left\|\overrightarrow{V_{P/R}}\right\|^2}{\gamma_n}}$

En fonction du type de mouvement (rectiligne et/ou uniforme) les accélérations γ_t et/ou γ_n peuvent s'annuler.

Exercice 2 : Suite de l'exercice 1.

1 – Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P/R0}}$

2.4 MRU, MRUV, MCU, MCUV

On s'intéresse maintenant au mouvements uniformes et uniformément variés en translation et rotation c'est-à-dire à une évolution particulière dans le temps des paramètres de position, de vitesse et d'accélération définis dans les chapitres précédents.

Ne jamais utiliser la relation $V = \frac{d}{t}$ dans le cadre des équations horaire (à un instant t donné) ci-après, car cette relation définie uniquement une vitesse moyenne linéaire. On devrait toujours écrire : $\boxed{V_{moy} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}}$

Ne jamais utiliser la relation $\dot{\theta} = \frac{\theta}{t}$ dans le cadre des équations horaire (à un instant t donné) ci-après, car cette relation définie uniquement une vitesse moyenne angulaire. On devrait toujours écrire : $\boxed{\dot{\theta}_{moy} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}}$

2.4.1 Le mouvement de translation rectiligne uniforme (MRU)

Dans ce cas l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} . \vec{n} = \gamma_n$ n'existe pas et $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} . \vec{t} = \gamma_t = 0$. On définit pour ce mouvement les données numériques suivantes :

t_i : instant initial (s)

t_f : instant final (s)

x_i : déplacement linéaire initial (m), à l'instant t_i

x_f : déplacement linéaire final (m), à l'instant t_f

V_i : vitesse linéaire initiale (m/s), à l'instant t_i

V_f : vitesse linéaire finale (m/s), à l'instant t_f

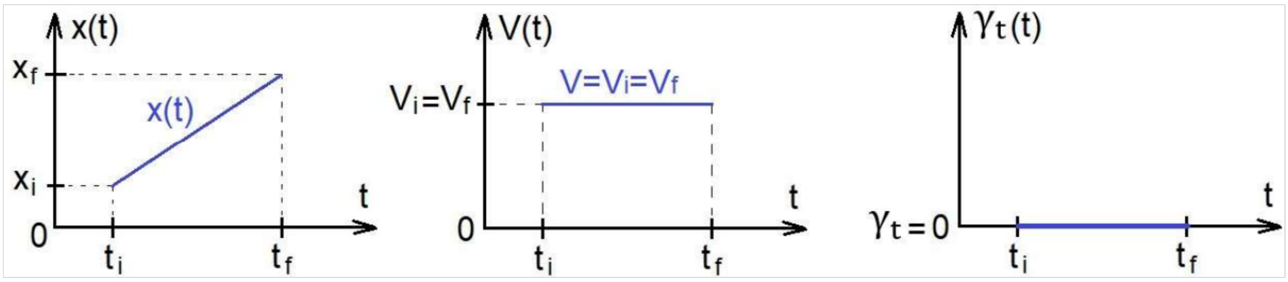
Equations horaires (à un instant donné) :

$\gamma_t = 0$

$V = V_i = V_f = \text{constante}$

$x(t) = V_i . (t - t_i) + x_i$: fonction du temps

$x_f = V_i . (t_f - t_i) + x_i$



Ce sont les équations et les graphiques caractéristiques par exemple d'une voiture (modélisée par un point) qui se déplace en ligne droite à vitesse constante.

$x(t)$ est une fonction linéaire du temps.

2.4.2 Le mouvement de translation rectiligne uniformément varié (MRUV)

Dans ce cas l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} . \vec{n} = \gamma_n$ n'existe pas et $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} . \vec{t} = \gamma_t = \text{constante}\ (\neq 0)$. On définit pour ce mouvement les données numériques suivantes :

t_i : instant initial (s)

t_f : instant final (s)

x_i : déplacement linéaire initial (m), à l'instant t_i

x_f : déplacement linéaire final (m), à l'instant t_f

V_i : vitesse linéaire initiale (m/s), à l'instant t_i

V_f : vitesse linéaire finale (m/s), à l'instant t_f

γ_t : accélération linéaire constante (m/s²)

Equations horaires (à un instant donné) :

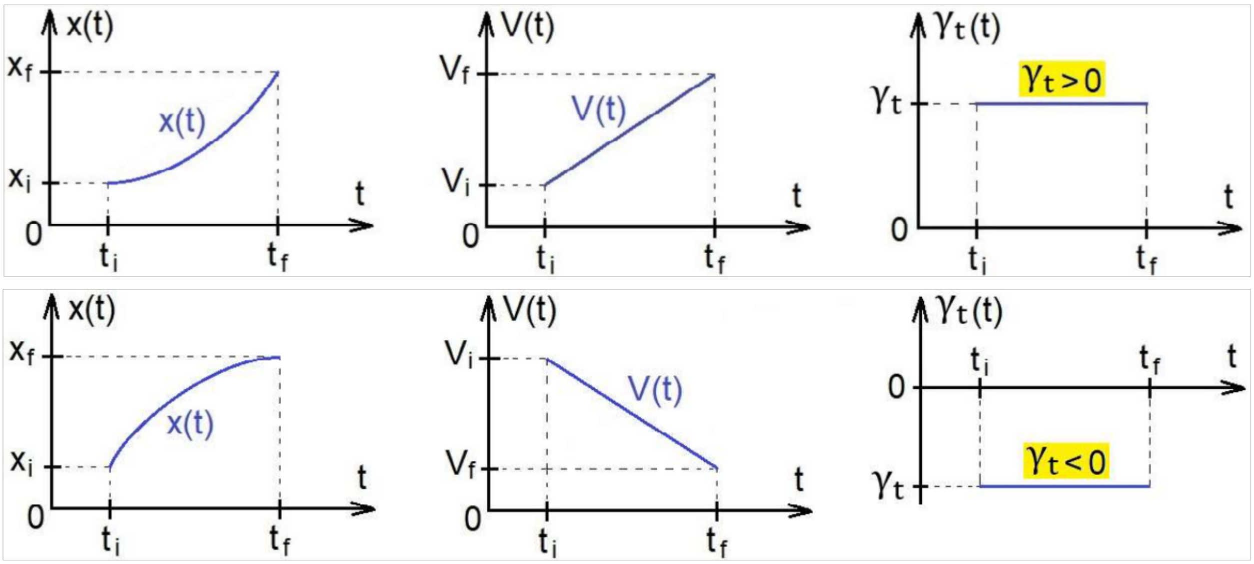
$\gamma_t = \text{constante}$

$V(t) = \gamma_t . (t - t_i) + V_i$: fonction du temps

$x(t) = \frac{1}{2} . \gamma_t . (t - t_i)^2 + V_i . (t - t_i) + x_i$: fonction du temps

$V_f = \gamma_t . (t_f - t_i) + V_i$

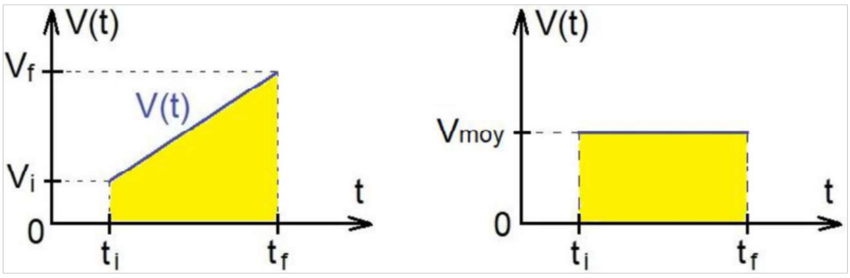
$x_f = \frac{1}{2} . \gamma_t . (t_f - t_i)^2 + V_i . (t_f - t_i) + x_i$



Ce sont les équations et les graphiques caractéristiques par exemple d'une voiture (modélisée par un point) qui, accélère (accélération constante positive) ou décélère (accélération constante négative), en ligne droite.

$x(t)$ est une fonction parabolique du temps et $V(t)$ est une fonction linéaire du temps.

Rappel : le calcul de la vitesse linéaire moyenne est défini par : $\boxed{V_{moy} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}}$; On a également une autre relation pour ce type de mouvement en retenant que les surfaces sous les courbes suivantes sont identiques :



- Calcul de la surface sous la courbe de gauche : $S = V_i \,.\, (t_f - t_i) + \frac{(V_f - V_i)\,.\,(t_f - t_i)}{2}$
- Calcul de la surface sous la courbe de droite : $S = V_{moy} \,.\, (t_f - t_i)$

Donc : $V_{moy} \,.\, (t_f - t_i) = V_i \,.\, (t_f - t_i) + \frac{(V_f - V_i)\,.\,(t_f - t_i)}{2}$; d'où : $V_{moy} = V_i + \frac{(V_f - V_i)}{2}$ (relation en vitesses seules)

Cette dernière relation n'est valable que dans le cas d'une évolution linéaire croissante d'une grandeur (courbe de gauche précédente), elle n'est pas à retenir, c'est la démarche qui est à connaitre.

Cette démarche est applicable quel que soit la forme de la courbe de gauche (la difficulté peut être le calcul de cette surface). La relation mathématique du calcul de la valeur moyenne sera alors différente. Remarque : les surfaces situées dans la zone des ordonnées négatives seront comptées négativement.

2.4.3 Le mouvement de rotation uniforme (Mouvement Circulaire Uniforme)

Dans ce cas l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \,.\, \vec{n} = \gamma_n = \text{constante } (\neq 0)$ et $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \,.\, \vec{t} = \gamma_t = 0$. On définit pour ce mouvement les données numériques suivantes :

t_i : instant initial (s)

t_f : instant final (s)

θ_i : angle initial (rad), à l'instant t_i

θ_f : angle final (rad), à l'instant t_f

$\dot{\theta}_i$: vitesse angulaire initiale (rad/s), à l'instant t_i

$\dot{\theta}_f$: vitesse angulaire finale (rad/s), à l'instant t_f

Equations horaires (à un instant donné) :

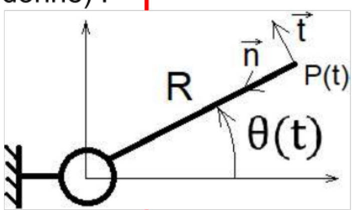
$\gamma_t = 0$

$\gamma_n = R \,.\, \dot{\theta}^2 = \frac{{V_P}^2}{R} = \text{constante}$

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_f = \text{constante}$

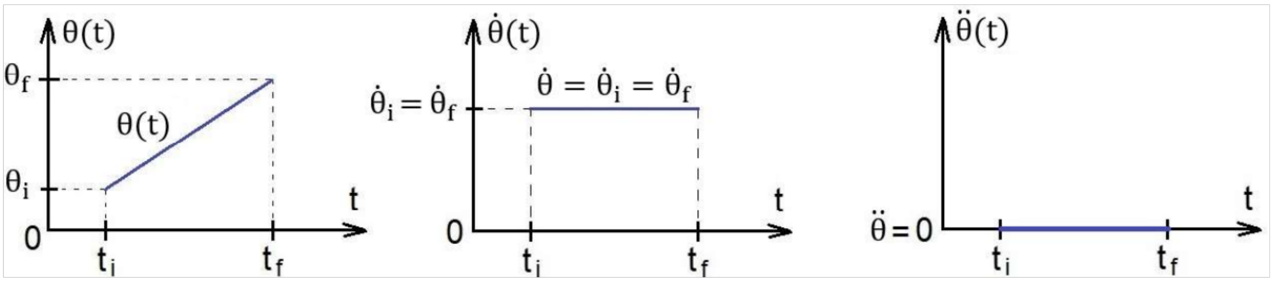
$\theta(t) = \dot{\theta}_i \,.\, (t - t_i) + \theta_i$: fonction du temps

$\theta_f = \dot{\theta}_i \,.\, (t_f - t_i) + \theta_i$



R : rayon constant du mouvement de rotation (m)

Remarques : γ_n est une accélération qui existe même dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme. On l'appelle accélération centripète. On rappelle également la relation : $V_P = R\,.\,\dot{\theta}\ (= R\,.\,\omega)$



Ce sont les équations et les graphiques caractéristiques par exemple d'un cheval en bois sur un manège (modélisée par un point) qui se déplace en rotation autour d'un axe à vitesse constante.

$\theta(t)$ est une fonction linéaire du temps.

2.4.4 Le mouvement de rotation uniformément varié (Mouvement Circulaire Uniformément Varié)

Dans ce cas l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\,.\,\vec{n} = \gamma_n\ (\neq 0)$ et $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}\,.\,\vec{t} = \gamma_t = \text{constante}\ (\neq 0)$. On définit pour ce mouvement les données numériques suivantes :

t_i : instant initial (s)

t_f : instant final (s)

θ_i : angle initial (rad), à l'instant t_i

θ_f : angle final (rad), à l'instant t_f

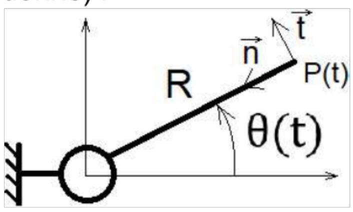
$\dot{\theta}_i$: vitesse angulaire initiale (rad/s), à l'instant t_i

$\dot{\theta}_f$: vitesse angulaire finale (rad/s), à l'instant t_f

$\ddot{\theta}$: accélération angulaire constante (rad/s²)

R : rayon constant du mouvement de rotation (m)

Equations horaires (à un instant donné) :



$\gamma_t = R\,.\,\ddot{\theta} = \text{constante}$

$\gamma_n = R\,.\,\dot{\theta}^2 = \frac{{V_P}^2}{R}$

$\ddot{\theta} = \text{constante}$

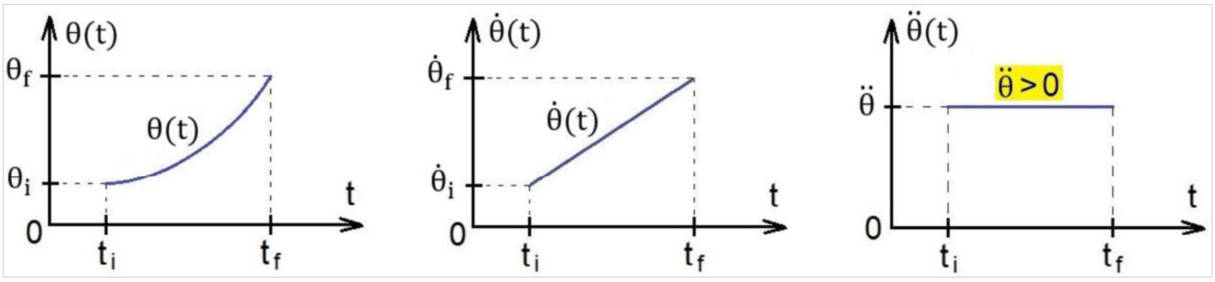
$\dot{\theta} = \ddot{\theta}\,.\,(t - t_i) + \dot{\theta}_i$: fonction du temps

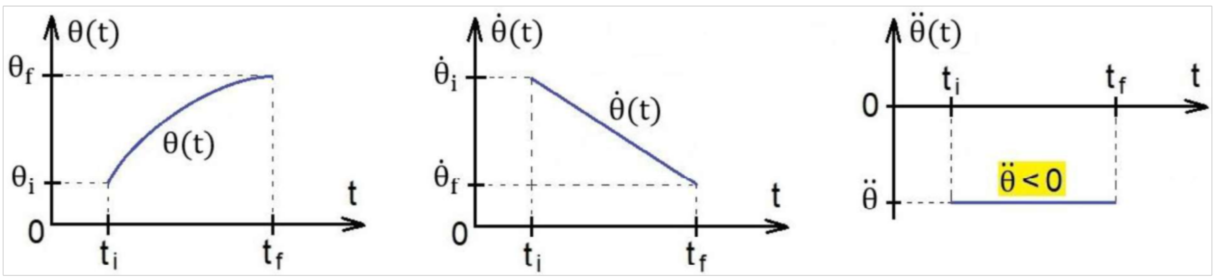
$\theta(t) = \frac{1}{2}.\ddot{\theta}\,.\,(t - t_i)^2 + \dot{\theta}_i\,.\,(t - t_i) + \theta_i$: fonction du temps

$\dot{\theta}_f = \ddot{\theta}\,.\,(t_f - t_i) + \dot{\theta}_i$

$\theta_f = \frac{1}{2}.\ddot{\theta}\,.\,(t_f - t_i)^2 + \dot{\theta}_i\,.\,(t_f - t_i) + \theta_i$

Remarques : l'expression de γ_n (accélération centripète) reste inchangée par rapport au mouvement de rotation uniforme, mais sa valeur numérique n'est plus constante. On remarque aussi que $\gamma_t = R\,.\,\ddot{\theta}\ (= R\,.\,\dot{\omega})$; c'est l'équation dérivée par rapport au temps de : $V_P = R\,.\,\dot{\theta}\ (= R\,.\,\omega)$





Ce sont les équations et les graphiques caractéristiques par exemple de la phase de mise en mouvement (ou en arrêt) d'un cheval en bois sur un manège (modélisée par un point) qui se déplace en rotation autour d'un axe.

$\theta(t)$ est une fonction parabolique du temps et $\dot{\theta}(t)$ est une fonction linéaire du temps.

Rappel : le calcul de la vitesse angulaire moyenne est défini par : $\boxed{\dot{\theta}_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}}$ et on peut également déterminer une autre relation pour calculer $\dot{\theta}_{moy}$ en fonction uniquement des paramètres de vitesse angulaire cette fois, en utilisant les surfaces sous les courbes de la même manière que la vitesse linéaire.

Exercice 3 : Découpe laser

Le chariot d'une machine de découpe laser démarre à une vitesse nulle et atteint la vitesse de 10 cm/s en 2 s. Le chariot évolue ensuite à vitesse constante pendant 8 secondes puis s'arrête en 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.

1 – Déterminer les équations horaires pour chacune des phases du mouvement. Préciser à chaque étape les valeurs initiales et finales des accélérations, vitesses et déplacement.

2 – Représenter les déplacements, vitesses et accélérations sur trois graphiques différents.

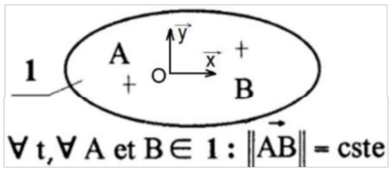
3 – Calculer la vitesse moyenne de deux façons différentes.

3 Cinématique du solide

3.1 Introduction

Les relations qui suivront dans ce chapitre ne sont valables que pour des solides considérés comme indéformables. Elles sont valables pour un solide ou une classe d'équivalence. Cela permet :

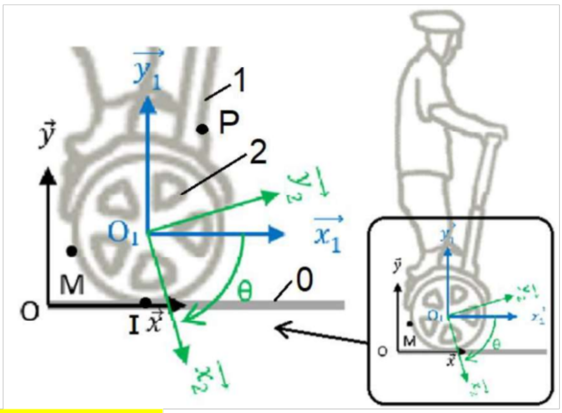
- De lier un repère à une pièce (ou à une classe d'équivalence) ; la position d'un point quelconque de la pièce (ou de la classe d'équivalence) reste constante dans ce repère.
- De représenter le champ des vitesses des points d'un solide (ou d'une classe d'équivalence) par un torseur car la distance entre deux points quelconques du solide (ou de la classe d'équivalence) reste constante.



Cette modélisation exclut naturellement les fluides ainsi que les pièces qui subissent de grandes déformations, comme les ressorts et les courroies de transmission.

3.2 Notations

Sur le gyropode ci-après, on distingue les points M appartenant à la roue, P appartenant au chassis et I point de contact entre le sol et la roue. Soient $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au sol 0, $R_1(O_1,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ un repère lié au chassis 1 et $R_2(O_1,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ un repère lié à la roue 2. $\theta = (\vec{x_1},\vec{x_2})$



Pour le point P, qui n'est pas un point de contact entre deux solides, on distingue :

- $\overrightarrow{V_{P/R}} = \vec{V}(P/R)$: vecteur vitesse du point P géométrique par rapport à R ; $\overrightarrow{V_{M/R}} = \vec{V}(M/R)$
- $\overrightarrow{V_{P\in 1/R}} = \vec{V}(P \in 1/R) = \overrightarrow{V_{P\in R1/R}} = \vec{V}(P \in R_1/R)$: vecteur vitesse du point P appartenant à 1 par rapport à R (appartenance naturelle) ; $\overrightarrow{V_{M\in 1/R}} = \vec{V}(M \in 1/R) = \overrightarrow{V_{M\in R1/R}} = \vec{V}(M \in R_1/R)$ (appartenance non naturelle)
- $\overrightarrow{V_{P\in 2/R}} = \vec{V}(P \in 2/R) = \overrightarrow{V_{P\in R2/R}} = \vec{V}(P \in R_2/R)$: vecteur vitesse du point P appartenant à 2 par rapport à R (appartenance non naturelle) ; $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \vec{V}(M \in 2/R) = \overrightarrow{V_{M\in R2/R}} = \vec{V}(M \in R_2/R)$ (appartenance naturelle)

On retrouve les mêmes notations similaires pour l'accélération, à savoir pour le point P : $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} = \vec{\Gamma}(P/R)$; $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 1/R}} = \vec{\Gamma}(P \in 1/R) = \overrightarrow{\Gamma_{P\in R1/R}} = \vec{\Gamma}(P \in R_1/R)$; $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/R}} = \vec{\Gamma}(P \in 2/R) = \overrightarrow{\Gamma_{P\in R2/R}} = \vec{\Gamma}(P \in R_2/R)$

Le calcul des différents vecteurs vitesse (ou accélération) d'un point, qui n'est pas point de contact, ne se fera pas de la même façon suivant que le point appartient naturellement ou pas au solide. Dans notre exemple :

$\boxed{\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P \in 1/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R}$ et $\boxed{\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M \in 2/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_R}$

Pour le moment, on ne sait pas calculer $\vec{V}(P \in 2/R)$ et $\vec{V}(M \in 1/R)$

Exercice 4 : Gyropode

On donne : $\overrightarrow{OP} = \mu\,.\vec{x} + L\,.\vec{y}$ avec $\mu = fct(t)$ et $L = cste$ dans R

$\overrightarrow{OO_1} = \lambda\,.\vec{x} + r\,.\vec{y}$ avec $\lambda = fct(t)$ et $r = cste$ dans R

On suppose à l'état initial que le gyropode est à la verticale du point O ; M est ainsi confondu avec O et $\theta = 0$

1 – Calculer $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{V}(P/R_1)$

2 – Déterminer le vecteur position du point M par rapport au repère R

3 – Calculer $\vec{V}(M/R)$, $\vec{V}(M/R_1)$ et $\vec{V}(M/R_2)$

Pour le point I, qui est un point de contact entre deux solides, on distingue :

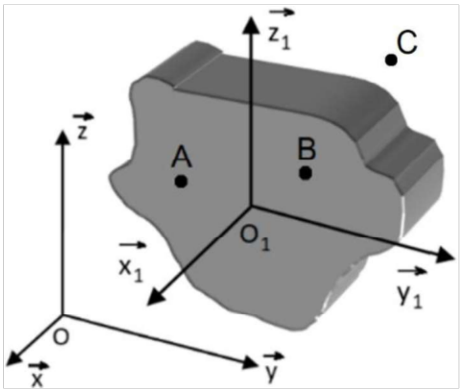
- $\overrightarrow{V_{I/R}} = \vec{V}(I/R)$: vecteur vitesse du point de contact I qui n'appartient à aucun des deux solides
- $\overrightarrow{V_{I\in 1/R}} = \vec{V}(I \in 1/R) = \overrightarrow{V_{I\in R1/R}} = \vec{V}(I \in R_1/R)$: vecteur vitesse du point I lié à 1 par rapport à R
- $\overrightarrow{V_{I\in 2/R}} = \vec{V}(I \in 2/R) = \overrightarrow{V_{I\in R2/R}} = \vec{V}(I \in R_2/R)$: vecteur vitesse du point I lié à 2 par rapport à R

De même, le calcul des différents vecteurs vitesse (ou accélération) d'un point, qui est point de contact, ne se fera pas de la même façon suivant que le point est géométrique ou lié à l'un ou l'autre solide. Dans notre exemple : $\boxed{\overrightarrow{V_{I/R}} = \vec{V}(I/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI}\right]_R}$; Pour le moment, on ne sait pas calculer : $\vec{V}(I \in 1/R)$ et $\vec{V}(I \in 2/R)$

Exercice 5 : Gyropode

1 – Calculer $\vec{V}(I/R)$ dans les conditions de l'exercice 4.

4 Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide



Soit le solide 1, de repère associé $R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, en mouvement par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (fixe ou pas). On considère deux points A et B appartenant réellement (naturellement) à ce solide et un point C qui n'appartient pas à 1.

4.1 Torseur cinématique ou torseur distributeur des vitesses

Le mouvement, par exemple au point A, du solide 1 par rapport au repère R est définit par le torseur suivant :

$$\{V(1/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_1/R) \\ \vec{V}(A\epsilon R_1/R) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$ avec : $\vec{V}(B\epsilon R_1/R) = \vec{V}(A\epsilon R_1/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$ (changement de point)

$\vec{\Omega}(R_1/R)$ est la résultante du torseur, c'est le vecteur vitesse de rotation instantané de R_1 par rapport à R.

$\vec{\Omega}(R_1/R) = -\vec{\Omega}(R/R_1)$: attention au sens.

$\vec{V}(A\epsilon R_1/R)$ est le moment du torseur au point A, il vérifie donc la relation de changement de point.

$\vec{V}(A\epsilon R_1/R) = -\vec{V}(A\epsilon R/R_1)$: attention au sens.

Il est appelé torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au repère R, ou torseur distributeur des vitesses. $\{V(1/R)\} = \{V(R_1/R)\}$

La relation de changement de point permet de définir, à partir de la vitesse d'un point connu d'un solide et la vitesse de rotation du solide, la vitesse de n'importe quel autre point de ce même solide (qu'il appartienne naturellement ou pas à ce solide). Application :

$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A \in 1/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R$ ou $\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A \in 1/R) = \vec{V}(B \epsilon R_1/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$: deux méthodes, soit en dérivant le vecteur position puisque A appartient naturellement au solide, soit en passant par un autre point qui appartient naturellement au solide (ici le point B)

$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(B \in 1/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_R$ ou $\vec{V}(B/R) = \vec{V}(B \in 1/R) = \vec{V}(A \epsilon R_1/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$: deux méthodes, soit en dérivant le vecteur position puisque B appartient naturellement au solide, soit en passant par un autre point qui appartient naturellement au solide (ici le point A)

$\vec{V}(C/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right]_R$: une seule méthode, en dérivant le vecteur position puisque C n'appartient à aucun solide.

$\vec{V}(C \in 1/R) = \vec{V}(A \epsilon R_1/R) + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$ ou $\vec{V}(C \in 1/R) = \vec{V}(B \epsilon R_1/R) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$: une seule méthode, en passant par un autre point qui appartient naturellement au solide (ici A ou B).

Exercice 6 : Gyropode

On donne : $\overrightarrow{OP} = \mu . \vec{x} + L . \vec{y}$ avec $\mu = \text{fct}(t)$ et $L = \text{cste}$ dans R

$\overrightarrow{OO_1} = \lambda . \vec{x} + r . \vec{y}$ avec $\lambda = \text{fct}(t)$ et $r = \text{cste}$ dans R

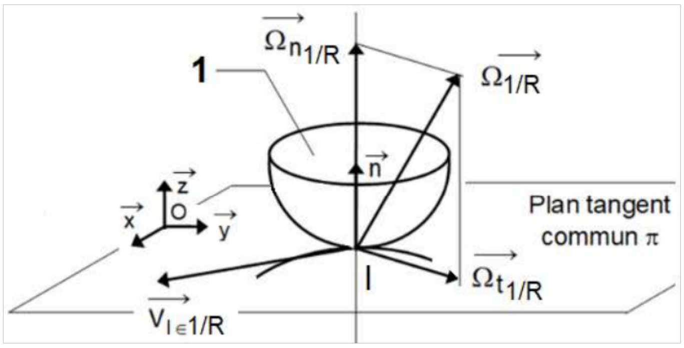
On suppose à l'état initial que le gyropode est à la verticale du point O ; M est ainsi confondu avec O et $\theta = 0$

1 – Calculer $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{V}(P \in 2/R)$ en utilisant la cinématique du solide.

2 – Calculer $\vec{V}(M/R)$, $\vec{V}(M/R_1)$ et $\vec{V}(M \in 1/R)$ en utilisant la cinématique du solide.

4.2 Relations complémentaires associées dans le cas d'un contact ponctuel

Dans le cas particulier où Le solide 1 est en contact ponctuel avec le repère R en I, on définit :



- $\vec{V}(I \in 1/R)$: vecteur vitesse de glissement au point I de 1 par rapport à R. Il appartient au plan tangent commun.
- $\vec{\Omega_n}(1/R) = \left(\vec{\Omega}(1/R).\vec{n}\right).\vec{n}$: vecteur vitesse de rotation de pivotement de 1 par rapport à R. $\vec{n}$: vecteur normal au plan π en I et orienté vers 1.
- $\vec{\Omega_t}(1/R) = \vec{\Omega}(1/R) - \vec{\Omega_n}(1/R)$: vecteur vitesse de rotation de roulement de 1 par rapport à R. Il appartient au plan π.

Dans le cas d'un contact sans glissement, on a : $\vec{V}(I \in 1/R) = \vec{0}$ (CRSG : condition de roulement sans glissement). C'est par exemple le cas d'une roue sur le sol qui roule sans glisser ou dans le cas d'un engrenage.

Ces notions restent valables dans le cas d'un contact linéique ou surfacique.

Exercice 7 : Gyropode

On se place dans la condition de roulement sans glissement.

1 – Calculer $\vec{V}(I \in 1/R)$ et $\vec{V}(I \in 2/R)$ en utilisant la cinématique du solide.

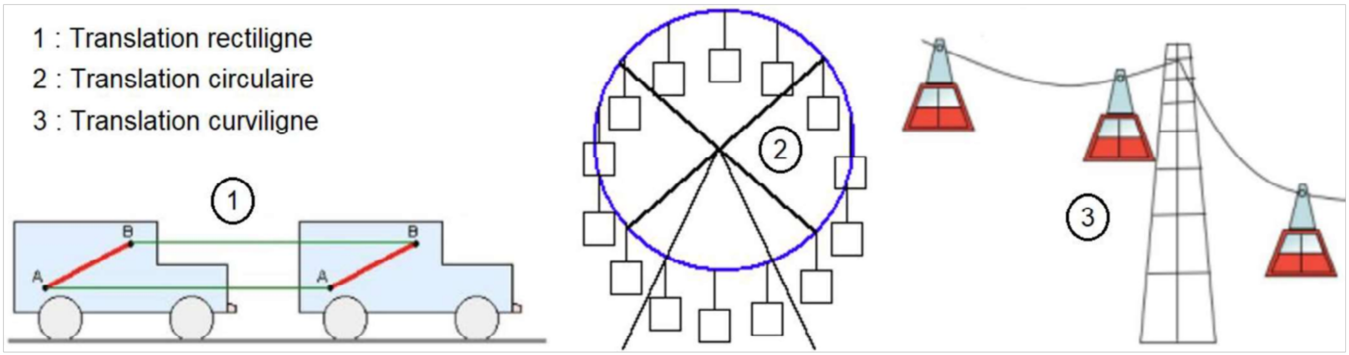
4.3 Mouvement de translation

Le mouvement de translation du solide 1 par rapport à R, est défini au point A par le torseur :

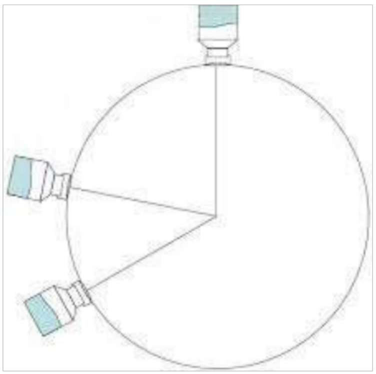
$\{V(1/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(A\epsilon R_1/R) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$ relation valable en tous points du solide car $\vec{V}(B\epsilon 1/R) = \vec{V}(A\epsilon 1/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$ et comme $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$, il reste $\vec{V}(B\epsilon 1/R) = \vec{V}(A\epsilon 1/R)$;

Le solide reste parallèle à lui-même, entre deux instants $\vec{V}(A\epsilon R_1/R)$ peut varier mais à chaque instant tous les vecteurs vitesse du solide sont égaux et on définit :

- Mouvement de translation rectiligne : trajectoire d'un point du solide 1 est une droite
- Mouvement de translation circulaire : trajectoire d'un point du solide 1 est un cercle
- Mouvement de translation curviligne : trajectoire d'un point du solide 1 est quelconque



4.4 Mouvement de rotation



Le mouvement de rotation du solide 1 par rapport à R, autour d'un axe passant par le point A, est défini par le torseur : $\{V(1/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_1/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$ quel que soit le point appartenant à l'axe de rotation. Remarques :

- Entre deux instants $\vec{\Omega}(R_1/R)$ peut varier
- Pour un point B qui appartient naturellement à 1 mais qui n'appartient pas à l'axe de rotation, $\vec{V}(B\epsilon R_1/R) \neq \vec{0}$

5 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

On se place toujours dans les conditions du début du chapitre 4 ; on a alors :

$\vec{\Gamma}(A/R) = \vec{\Gamma}(A \in 1/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(A/R)\right]_R$; $\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(B \in 1/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R)\right]_R$; $\vec{\Gamma}(C/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(C/R)\right]_R$ et on donne :

$\vec{\Gamma}(C \epsilon 1/R) = \vec{\Gamma}(A \epsilon 1/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R_1/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ en passant par le point A qui appartient naturellement au solide 1 (on aurait également pu passer par le point B).

Ce n'est pas la relation de changement de point d'un torseur. Il n'y a donc pas de torseur d'accélération.

Cette dernière relation sert surtout pour calculer le vecteur accélération d'un point qui n'appartient pas naturellement à un solide et pour appliquer le principe fondamental de la dynamique en mouvement relatif. On évitera de l'utiliser pour calculer le vecteur accélération d'un point qui appartient naturellement à un solide.

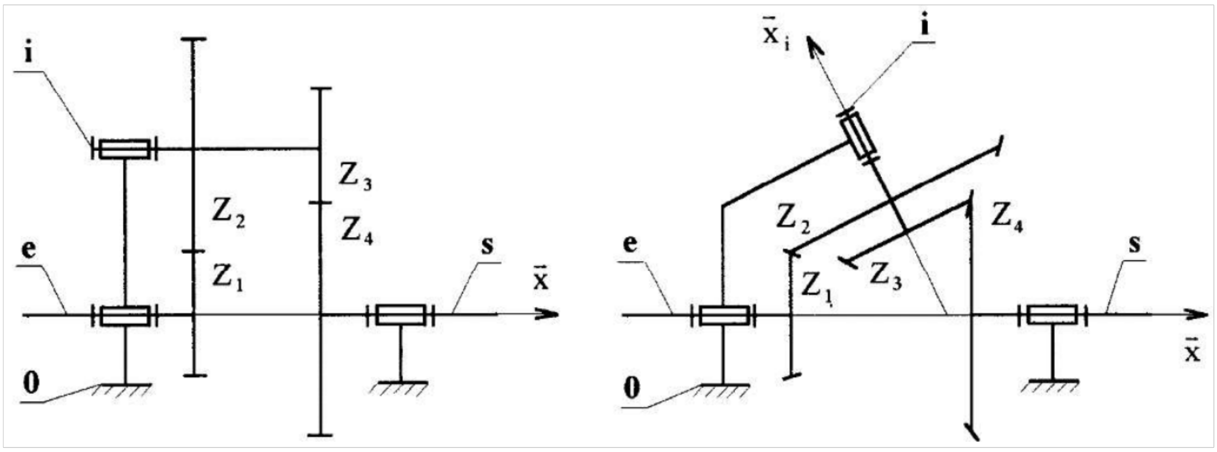
6 Les réducteurs

Mathématiquement, on peut traiter cinématiquement tous les types de réducteurs en exploitant la condition de roulement sans glissement vue précédemment, appliquée au point de contact des engrenages. D'autres méthodes sont également présentées dans ce paragraphe.

6.1 Les réducteurs simples

Un réducteur simple est constitué d'un ou plusieurs engrenage(s) dont les axes géométriques des roues dentées sont fixes par rapport à un bâti 0 (engrenage : ensemble de deux roues dentées dont l'une est le pignon).

Schémas de principe d'un réducteur simple à axes parallèles et à axes concourants :



Un sens de parcours de la chaîne cinématique étant fixé au niveau des engrenages, on note e l'arbre d'entrée, s l'arbre de sortie, i l'arbre lié aux roues intermédiaires et Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 les nombres de dents des roues.

6.1.1 Réducteur à axes parallèles

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de même direction que l'axe $\vec{x}$ des roues.

On pose : $\boxed{\vec{\Omega}(e/0) = \omega_e\,.\vec{i}\,;\,\vec{\Omega}(s/0) = \omega_s\,.\vec{i}\,;\,\vec{\Omega}(i/0) = \omega_i\,.\vec{i}}$

Le rapport de réduction (ou de multiplication) d'un engrenage est inversement proportionnel au nombre de dents des roues qui le constituent. Ce rapport est affecté d'un signe plus ou moins suivant la nature du contact :

Signe moins, dans le cas d'un contact qui inverse le sens

Signe plus, dans le cas d'un contact qui n'inverse pas le sens

Par conséquent : $\frac{\omega_i}{\omega_e} = -\frac{Z_1}{Z_2}$, $\frac{\omega_s}{\omega_i} = -\frac{Z_3}{Z_4}$, d'où : $\boxed{\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{Z_1 * Z_3}{Z_2 * Z_4}}$ sur le schéma précédent à gauche

Le sens de parcours de la chaîne cinématique étant fixé, on appelle :

Roues menantes : la roue de Z_1 dents du premier engrenage et la roue de Z_3 dents du second engrenage

Roues menées : la roue de Z_2 dents du premier engrenage et la roue de Z_4 dents du second engrenage.

La relation précédente se généralise facilement. Si on appelle n le nombre d'engrenages qui inverse le sens de rotation, le rapport de réduction s'écrit : $\boxed{\frac{\omega_s}{\omega_e} = (-1)^n.\,k \text{ avec : } k = \frac{\text{produit des nombres de dents des roues menantes}}{\text{produit des nombres de dents des roues menées}}}$

Le terme $(-1)^n.\,k$ est appelé raison du train d'engrenages avec $k = \frac{Z_1 * Z_3}{Z_2 * Z_4}$

6.1.2 Réducteur à axes concourants

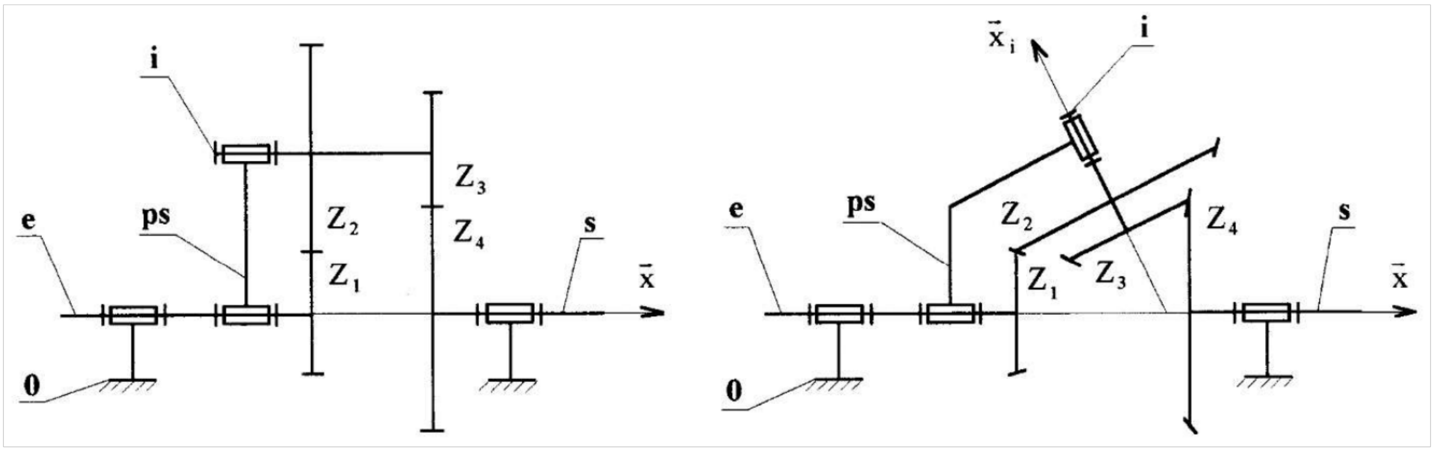
Chaque arbre est orienté par un vecteur unitaire arbitraire. Le rapport de réduction se met sous la forme :

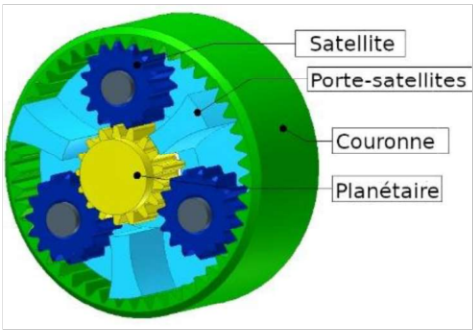
$\boxed{\frac{\omega_s}{\omega_e} = \varepsilon\,.\,k \text{ avec } \varepsilon = \pm 1}$ suivant l'orientation des axes. Pour obtenir le bon signe, il faut « visualiser » le sens de rotation de l'arbre de sortie s, pour un sens de rotation donné de l'arbre d'entrée e. $\varepsilon = -1$ sur le schéma précédent à droite, k reste le même que celui du schéma de gauche.

6.2 Les réducteurs à train épicycloïdal

Un réducteur à train épicycloïdal est constitué par un train d'engrenages dont les axes géométriques des roues dentées sont fixes par rapport à un porte-satellite ps, en rotation par rapport à un bâti 0.

Schémas de principe d'un réducteur à train épicycloïdal à axes parallèles et à axes concourants :





Un sens de parcours de la chaîne cinématique étant fixé au niveau des engrenages, on note e l'arbre d'entrée, s l'arbre de sortie, i le satellite et Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 les nombres de dents des roues.

En cinématique, un seul satellite est nécessaire pour l'étude.

Réducteur à axes parallèles

Soit $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire de même direction que l'axe $\vec{x}$ des roues.

On pose : $\boxed{\vec{\Omega}(e/0) = \omega_e * \vec{\imath}\,;\, \vec{\Omega}(s/0) = \omega_s * \vec{\imath}\,;\, \vec{\Omega}(ps/0) = \omega * \vec{\imath}}$

Pour un observateur lié au porte-satellite, tous les axes géométriques des roues sont fixes. Par conséquent, on se ramène au cas précédent, du réducteur simple, en considérant les vecteurs vitesse de rotation des arbres d'entrée et de sortie par rapport au porte-satellite. Soit :

$$\vec{\Omega}(e/ps) = \vec{\Omega}(e/0) - \vec{\Omega}(ps/0) = (\omega_e - \omega) * \vec{\imath}$$

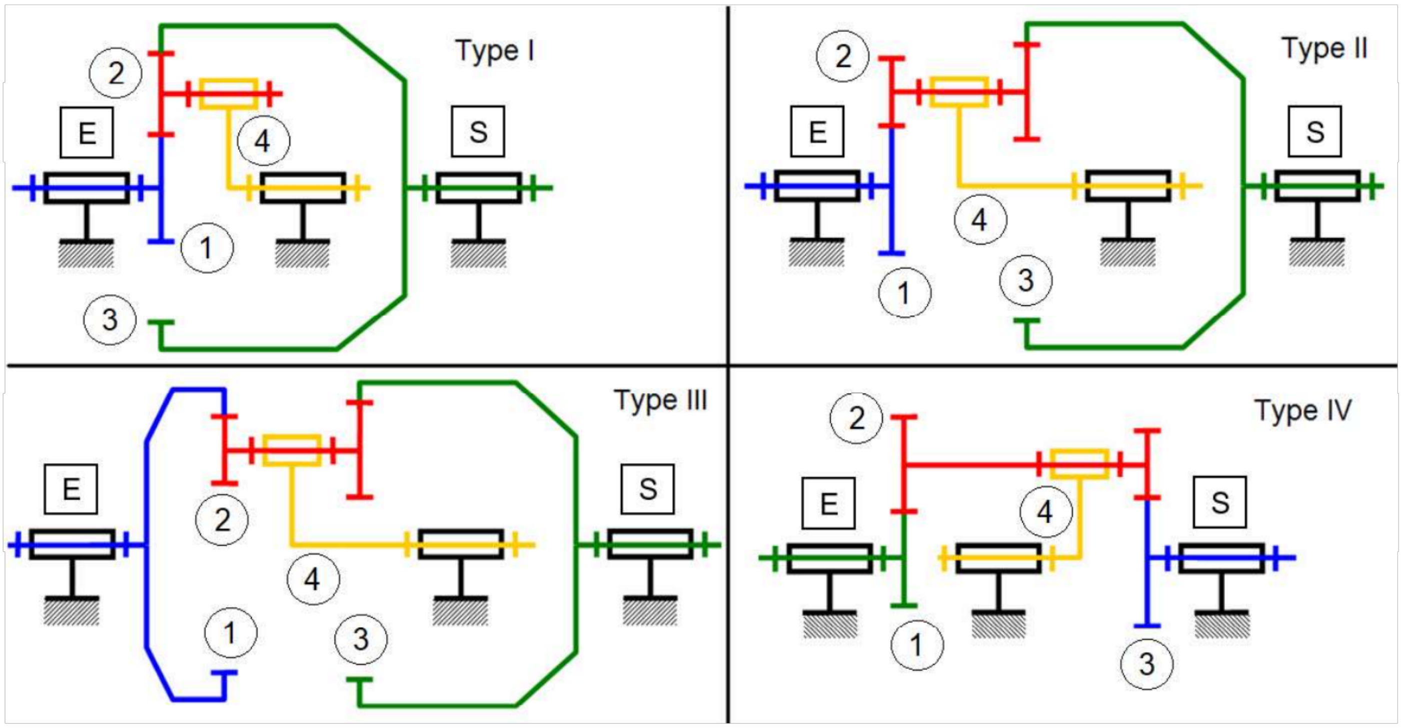
$$\vec{\Omega}(s/ps) = \vec{\Omega}(s/0) - \vec{\Omega}(ps/0) = (\omega_s - \omega) * \vec{\imath}$$

Par suite, avec ces vitesses de rotation relative à ps, on obtient la relation (formule de Willis) :

$$\boxed{\frac{\omega_s - \omega}{\omega_e - \omega} = (-1)^n * k \text{ avec toujours : } k = \frac{\text{produit des nombres de dents des roues menantes (pour un observateur lié au ps)}}{\text{produit des nombres de dents des roues menées (pour un observateur lié au ps)}}}$$

$k = \frac{z_1 * z_3}{z_2 * z_4}$ sur le schéma précédent de gauche. Suivant le type, ω, ω_s ou $\omega_e = 0$:

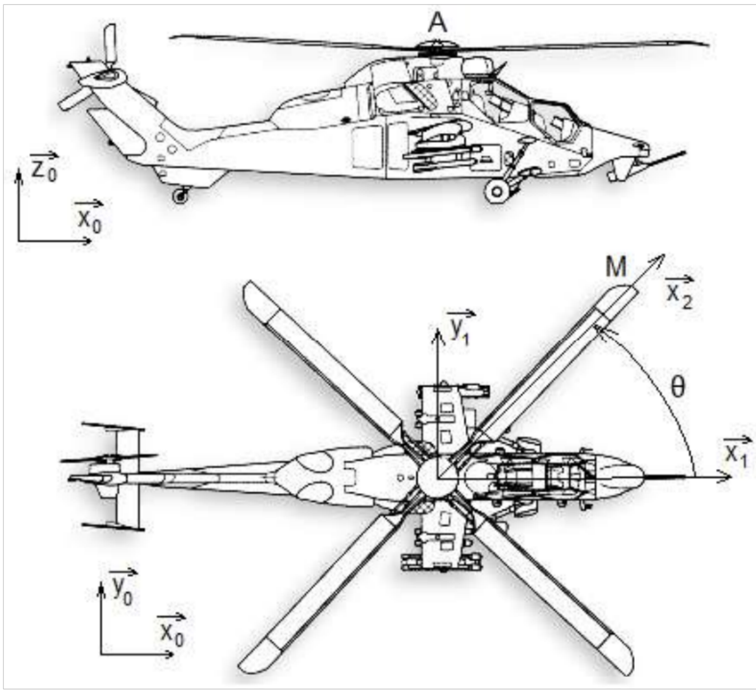
Il existe quatre types différents de réducteurs à trains épicycloïdaux simples :



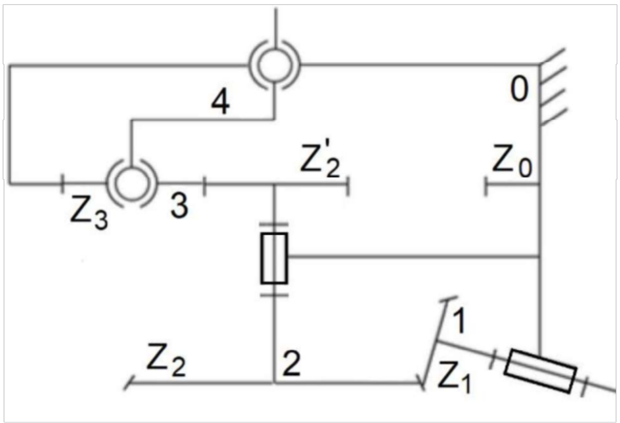
Réducteur à axes concourants

Chaque arbre est orienté par un vecteur unitaire arbitraire. De la même façon, le rapport de réduction s'écrit : $\boxed{\frac{\omega_s-\omega}{\omega_e-\omega} = \varepsilon\,.\,k \text{ avec } \varepsilon = \pm 1}$ suivant l'orientation des axes. Pour obtenir le bon signe, il faut « visualiser » le sens de rotation de l'arbre de sortie s, pour un sens de rotation donné de l'arbre d'entrée e. C'est un exercice difficile.

7 Exemple de l'hélicoptère



Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère fixe par rapport au sol et $R_1(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère 1, où A est le point au centre du rotor principal. On note $\overrightarrow{OA} = h.\overrightarrow{z_0} + \lambda(t).\overrightarrow{x_0}$ où h est une constante. Le rotor principal 2 de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit $R_2(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$. La vitesse angulaire (constante) du rotor par rapport à l'hélicoptère est notée $\dot{\theta} = \omega_{40}$. Soit M le point situé à l'extrémité d'une pale. $\overrightarrow{x_2}$ est choisi tel que $\overrightarrow{AM} = R\,.\overrightarrow{x_2}$ où R est une constante. La vitesse angulaire de l'arbre 1 par rapport à l'hélicoptère est $\omega_{10} = 5835 \text{ trs/min}$ et la longueur d'une pale est R = 6,5 m. On donne $Z_1 = 15,\ Z_2 = 60,\ Z'_2 = 25,\ Z_3 = 35,\ Z_0 = 100$. Le module m est identique pour chaque roue dentée.



Partie 1 : Recherche de la vitesse de rotation ω_{40} sachant que $\omega_{10} = 5835 \text{ trs/min}$

Q 1.1 : Déterminer le rapport de réduction du réducteur simple.

Recherche du rapport de réduction du train épicycloïdal $\frac{\omega_{40}}{\omega_{20}}$:

Méthode 1 (Willis) :

Le réducteur est de type I. Recherche de k. Pour se faire on détermine le rapport de réduction du train épicycloïdal en se considérant lié au porte-satellite : on considère qu'il est fixe et que les pignons et roues dentées tournent autour de lui.

Q 1.2 : Déterminer k dans cette configuration.

Q 1.3 : Déterminer $\frac{\omega_s-\omega}{\omega_e-\omega}$ en fonction de k et des indices de l'exercice. On pourra s'aider du schéma de type I.

Q 1.4 : Déterminer quelle vitesse angulaire est nulle sur le réducteur à train épicycloïdal réel.

Q 1.5 : Déterminer alors le rapport de réduction du train épicycloïdal $\frac{\omega_{40}}{\omega_{20}}$

Q 1.6 : Déterminer alors le rapport de réduction du réducteur complet ainsi que la vitesse de rotation ω_{40}

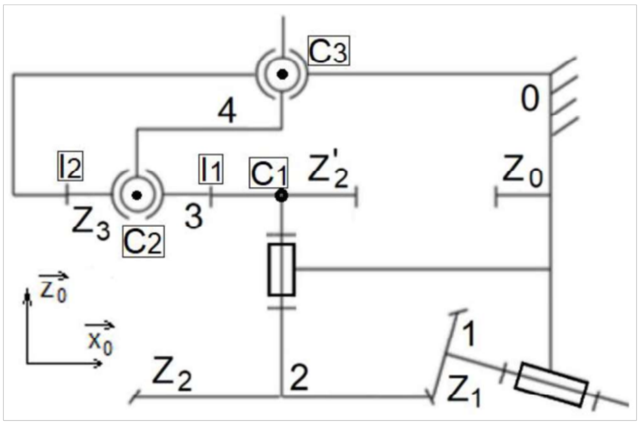
Méthode 2 (CRSG) :

On donne les points de centre des axes de rotation ainsi que les points de contact des engrenages.

Q 1.7 : Déterminer $\vec{V}(I_1 \in 3/2)$

Q 1.8 : Décomposer cette vitesse en deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles et en passant par le porte-satellite.

Q 1.9 : Déterminer ses deux vecteurs vitesse en passant par des points de centre et en déduire une première relation cinématique entre les vitesses angulaires et les nombres de dents.



Q 1.10 : Déterminer $\vec{V}(I_2 \in 3/0)$

Q 1.11 : Décomposer cette vitesse en deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles et en passant par le porte-satellite.

Q 1.12 : Déterminer ses deux vecteurs vitesse en passant par des points de centre et en déduire une deuxième relation cinématique entre les vitesses angulaires et les nombres de dents.

Q 1.13 : Déterminer à l'aide des deux relations cinématiques précédentes le rapport de réduction du réducteur complet ainsi que la vitesse de rotation ω_{40}

La vitesse de rotation ω_{40} est maintenant connue.

Partie 2 : Recherche de la vitesse maximale de déplacement de l'hélicoptère.

Q 1.14 : Tracer la figure de changement de base utile aux projections

Q 1.15 : Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}$

Q 1.16 : Déterminer les vecteurs vitesse de rotation : $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ et $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$

Q 1.17 : Déterminer $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ par dérivation vectorielle puis exprimer le résultat final dans R_0

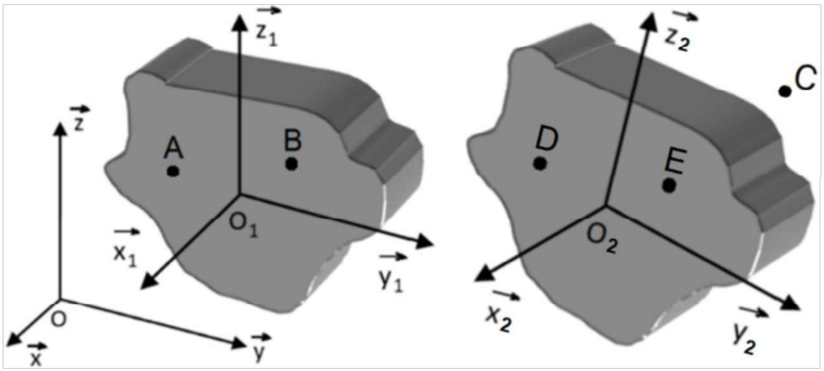
Q 1.18 : Déterminer alors l'expression de la vitesse maximale V_{max} de $\left\|\overrightarrow{V_{M/R_0}}\right\|$ et préciser pour quelle position cette vitesse est atteinte.

Q 1.19 : Afin de conclure par rapport à la problématique, déterminer la vitesse maximale à laquelle l'hélicoptère peut se déplacer. Donner le résultat en km/h.

8 Composition des mouvements de solides - les vecteurs vitesse

On s'intéresse maintenant à la relation entre les torseurs cinématiques de deux solides en mouvement relatif.

On complète l'introduction du chapitre 4 avec le solide 2, de repère associé $R_2(O_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$, en mouvement par rapport aux repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ (fixes ou pas). On considère deux nouveaux points D et E appartenant réellement (naturellement) à ce solide 2 et un point C qui n'appartient ni à 1, ni à 2.



On montre que l'on a dans ce cas : $\boxed{\{V(2/R)\} = \{V(2/1)\} + \{V(1/R)\}}$ (relation de Chasles) avec :

$$\boxed{{}_D\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_2/R) \\ \vec{V}(D \in R_2/R) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_2/R_1) \\ \vec{V}(D \in R_2/R_1) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} + {}_D\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_1/R) \\ \vec{V}(D \in R_1/R) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}}$$

Avec logiquement : $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R)}$ et : $\boxed{\vec{V}(D \in R_2/R) = \vec{V}(D \in R_2/R_1) + \vec{V}(D \in R_1/R)}$

On peut aussi écrire : $\boxed{\vec{V}(D/R) = \vec{V}(D/R_1) + \vec{V}(D \in R_1/R)}$ car D appartient naturellement à 2. C'est la relation de composition des vecteurs vitesse.

- $\vec{V}(D/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right]_R$: vecteur vitesse absolue.

- $\vec{V}(D/R_1) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right]_{R_1}$: vecteur vitesse relative.
- $\vec{V}(D\epsilon R_1/R)$: vecteur vitesse d'entrainement (le calcul se fait uniquement en passant par un point qui appartient naturellement à 1 : par exemple A, B ou encore O_1)

Ces 3 définitions n'ont plus lieu d'être si le point considéré est en mouvement par rapport à plus de deux repères.

Les relations précédentes se généralisent à n repères R_1, R_2 , …, R_n en mouvement les uns par rapport aux autres. Le torseur cinématique du mouvement du repère R_i par rapport au repère R_{i-1} s'écrit au point C :

$\boxed{\{V(R_i/R_{i-1})\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}) \\ \vec{V}(C\epsilon R_i/R_{i-1}) \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}}$ avec la relation de composition : $\boxed{\{V(R_n/R_1)\} = \sum_{i=2}^{n} \{V(R_i/R_{i-1})\}}$

C'est la relation de composition des torseurs cinématiques. Elle est utilisée en particulier dans le cas d'une fermeture cinématique d'une chaine fermée de solides.

On a donc aussi : $\boxed{\vec{\Omega}(R_n/R_1) = \sum_{i=2}^{n} \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1})}$ et $\boxed{\vec{V}(C\epsilon R_n/R_1) = \sum_{i=2}^{n} \vec{V}(C\epsilon R_i/R_{i-1})}$

Dans le cas où le point C appartient à un solide 3, on a donc :

$\vec{V}(C\epsilon R_3/R) = \vec{V}(C\epsilon R_3/R_2) + \vec{V}(C\epsilon R_2/R_1) + \vec{V}(C\epsilon R_1/R)$ donc :

$\vec{V}(C/R) = \vec{V}(C/R_2) + \vec{V}(C\epsilon R_2/R_1) + \vec{V}(C\epsilon R_1/R)$

9 Composition des mouvements de solides – les vecteurs accélération

On se place dans les conditions du chapitre précédent. La relation de composition des vecteurs accélération est donnée par : $\vec{\Gamma}(D/R) = \vec{\Gamma}(D/R_1) + \vec{\Gamma}(D\epsilon R_1/R) + 2.\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(D/R_1)$

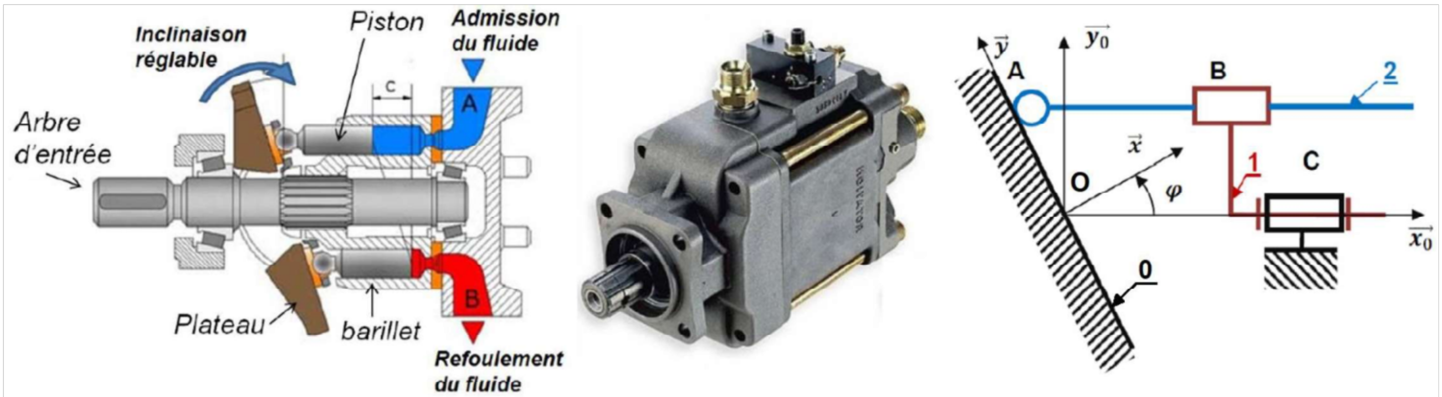
Dans le mouvement du point D par rapport aux deux repères R et R_1, on définit :

- $\vec{\Gamma}(D/R)$: vecteur accélération absolue.
- $\vec{\Gamma}(D/R_1)$: vecteur accélération relative.
- $\vec{\Gamma}(D\epsilon R_1/R)$: vecteur accélération d'entrainement.
- $2.\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}(D/R_1)$: vecteur accélération de Coriolis.

Ces définitions n'ont plus lieu d'être lorsque l'on a plus de deux repères.

Exercice 8 : Pompe hydraulique à pistons axiaux et à débit variable

Dans ce type de pompe, les pistons sont logés dans un barillet lié à l'arbre d'entrée. Un système de réglage de l'inclinaison du plateau, qui est fixe pendant la phase d'utilisation de la pompe, permet de faire varier le débit du fluide en sortie de la pompe. Lorsque le débit de la pompe est réglé, c'est-à-dire lorsque l'inclinaison du plateau est fixée, on peut étudier le comportement cinématique de la pompe à partir du schéma cinématique minimal (un seul piston représenté) dessiné ci-après.



Soient $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ et $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0})$ associés au corps 0, tels que $\overrightarrow{OC} = c\,.\vec{x_0}$ et $\varphi = (\vec{x_0}, \vec{x}) = cte$.

$R_1(O, \vec{x_0}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est associé au barillet 1, tel que $\overrightarrow{CB} = b.\vec{x_0} + r.\vec{y_1}$ et $\alpha = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$

$R_2(A, \vec{x_0}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est associé au piston 2, tel que $\overrightarrow{BA} = \lambda.\vec{x_0}$

Un ressort non représenté assure le maintien du contact du piston 2 avec le corps 0 au point A.

1 – Donner les paramètres géométriques, le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.

2 – Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

3 – Déterminer, à l'aide d'une fermeture cinématique, la loi entrée-sortie en vitesse du système. On recherche ainsi à exprimer $\dot{\lambda} = f(\alpha, \dot{\alpha})$ (il ne faut pas tout calculer, mais simplement l'équation de projection qui nous intéresse, c'est-à-dire la composition des vecteurs vitesses au point A en projection sur $\vec{x}$).

4 – Donner la relation entre le débit instantané Q en sortie de la pompe (pour un seul piston), la surface S de la section du piston et $\dot{\lambda}$ sachant qu'un débit est un volume divisé par un temps.

5 – En déduire l'expression de ce débit instantané en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée lorsque le piston aspire de l'huile.

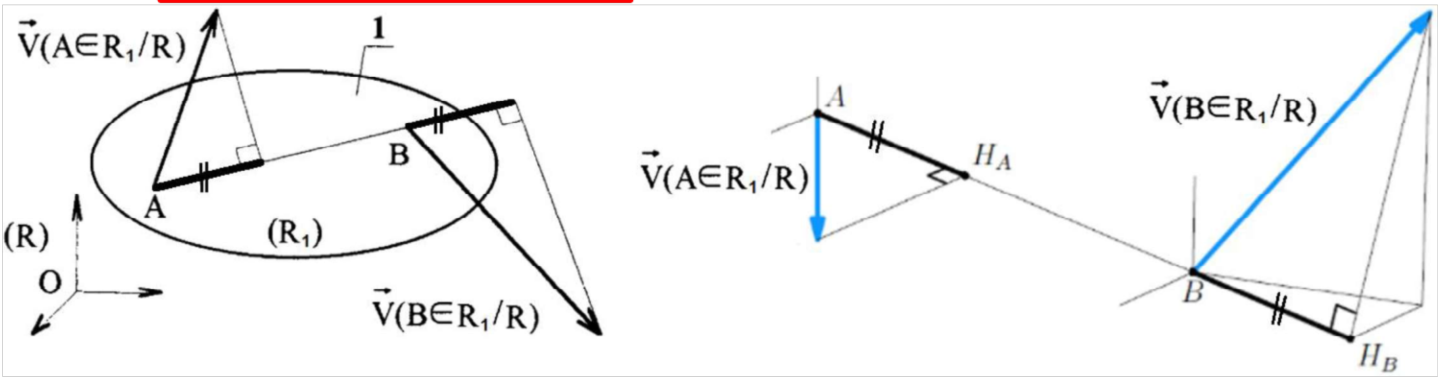
6 – Indiquer la façon dont il faut faire évoluer la géométrie de la pompe pour augmenter son débit.

10 Etude des mouvements plans de solides

Le mouvement plan sur plan est fréquemment rencontré (engrenages, système bielle-manivelle, excentrique...) et ce paragraphe permettra de mettre en évidence des propriétés originales afin de déterminer simplement la cinématique de ces mouvements.

10.1 Equiprojectivité

Soit le solide 1, de repère associé $R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, en mouvement par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (fixe ou pas). On considère deux points quelconque A et B appartenant réellement (naturellement) à ce solide. Le champ des moments d'un torseur étant équiprojectif, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide l'est également : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A \in R_1/R) = \overrightarrow{AB}.\vec{V}(B \in R_1/R)}$



Cela signifie que, sur un axe de direction AB, les mesures algébriques des projections orthogonales des vecteurs vitesse des points A et B sont égales. C'est logique : les points A et B doivent se suivre dans le mouvement du solide 1 par rapport au repère R sinon le solide éclaterait. Cette relation, valable dans le plan mais aussi dans l'espace est surtout utilisée dans la résolution graphique des problèmes de cinématique plane.

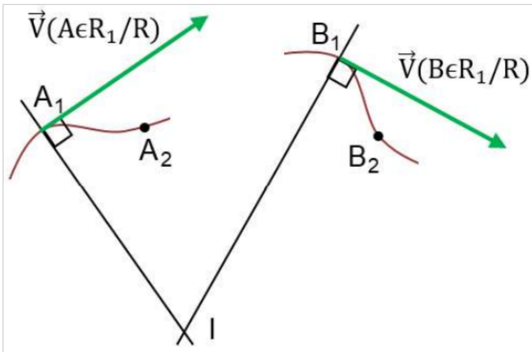
10.2 Centre instantané de rotation, base et roulante

Soit le solide 1, de repère associé $R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, en mouvement plan par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (fixe ou pas). On considère deux points quelconque A et B appartenant réellement (naturellement) à ce solide.

Il existe un point I unique, appelé centre instantané de rotation (CIR) du mouvement plan sur plan de R_1 par rapport à R, à la date t tel que : $\boxed{\vec{V}(I \in R_1/R) = \vec{0}}$ C'est-à-dire qu'à un instant donné, le mouvement du plan mobile

R_1 par rapport au plan fixe R est une rotation autour de I. Lorsque t varie, le point I varie et il décrit dans R_1 et dans R deux courbes :

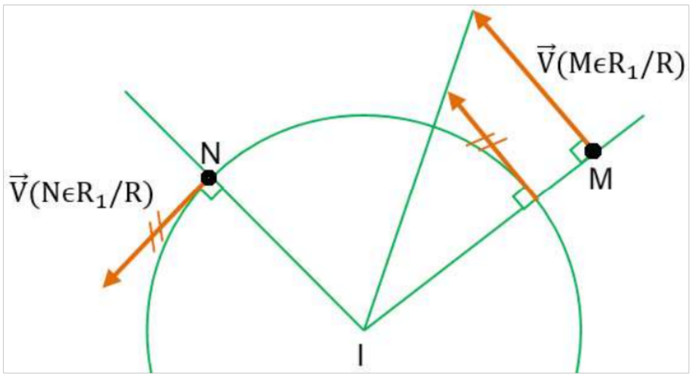
- La trajectoire du point I dans le repère R_1 (ou plan mobile), est appelée roulante du mouvement plan sur plan de R_1 par rapport à R
- La trajectoire du point I dans le repère R (ou plan fixe), est appelée base du mouvement plan sur plan de R_1 par rapport à R. La base et la roulante sont deux courbes tangentes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre

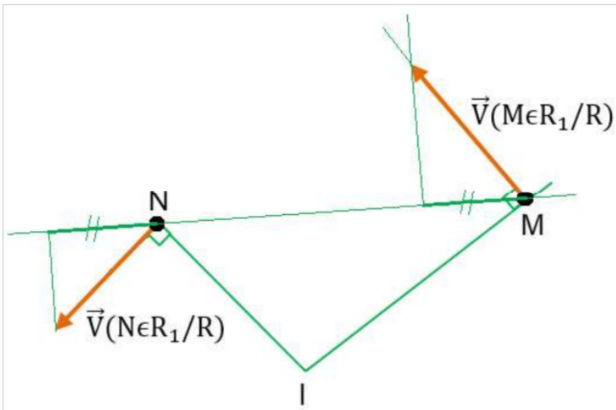


Si l'on connait les trajectoires de deux points du plan mobile dans le plan fixe, le centre instantané de rotation se trouve à l'intersection des normales aux vecteurs vitesse de ces points. Sa définition est instantanée et son utilisation n'a d'intérêt que pour un instant (une configuration) donné(e).

10.3 Exploitation graphique

On veut déterminer graphiquement la vitesse d'un point $\vec{V}(M\epsilon R_1/R)$, connaissant $\vec{V}(N\epsilon R_1/R)$. On peut utiliser l'équiprojectivité, le CIR et/ou la géométrie (pour les rapports de proportion). Exemples :





Exercice 9 : Presse à genouillère

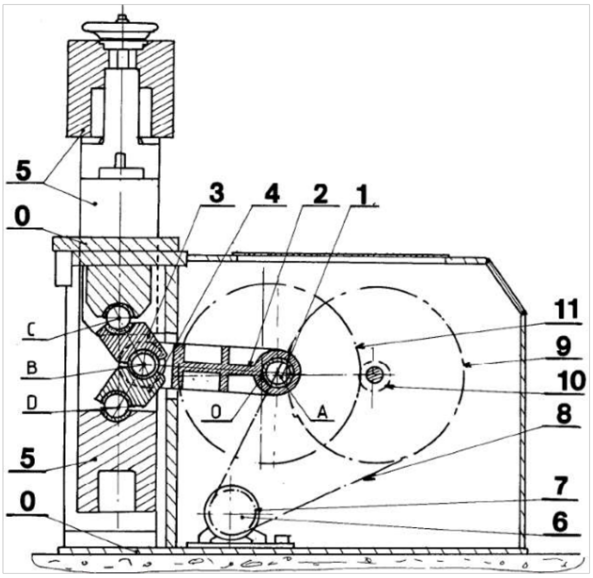
La presse à genouillère proposée est utilisée pour fabriquer des pièces de monnaie, de circlips, rondelles, etc…

Le principe de transformation de mouvement « bielle-manivelle » permet à la presse d'avoir un encombrement réduit.

La transmission se compose d'un moteur 6, d'une poulie motrice 7, de courroies 8, d'une poulie réceptrice 9, d'un engrenage (pignon 10 + roue 11) entraînant en O un arbre excentré 1 (OA).

La partie genouillère se compose de l'arbre 1 (OA) entraînant en A une bielle 2 (AB), suivie de biellettes 3 (BC) et 4 (BD) renvoyant le mouvement en D au coulisseau 5. Ce dernier est en translation verticale de direction CD par rapport au bâti 0.

La matrice, qui permet d'obtenir la forme désirée, est montée à l'extrémité du coulisseau. $N_{1/0}$ = 60 tr/min et $\|\overrightarrow{OA}\| = a = 60 \text{ mm}$



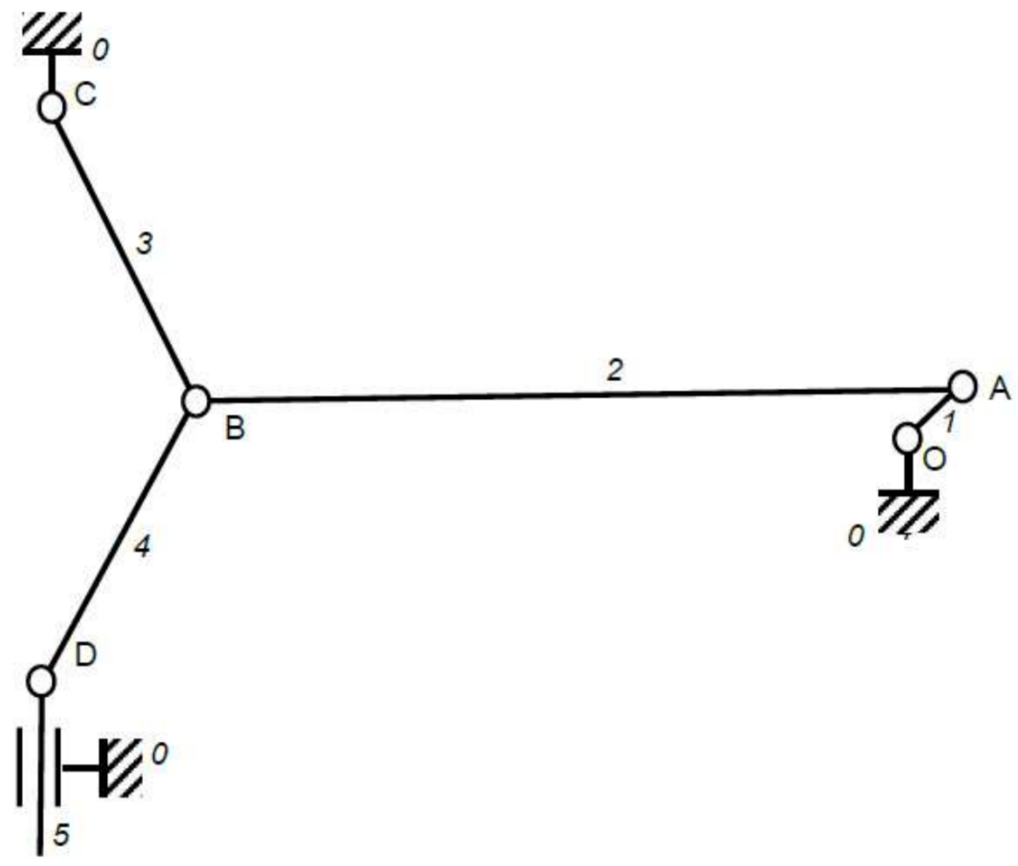
Problématique : L'exigence id = « 1.1 » est-elle satisfaite ?

1 – Identifier les mouvements des solides par rapport au bâti 0. Déterminer graphiquement le ou les CIR associés aux pièces.

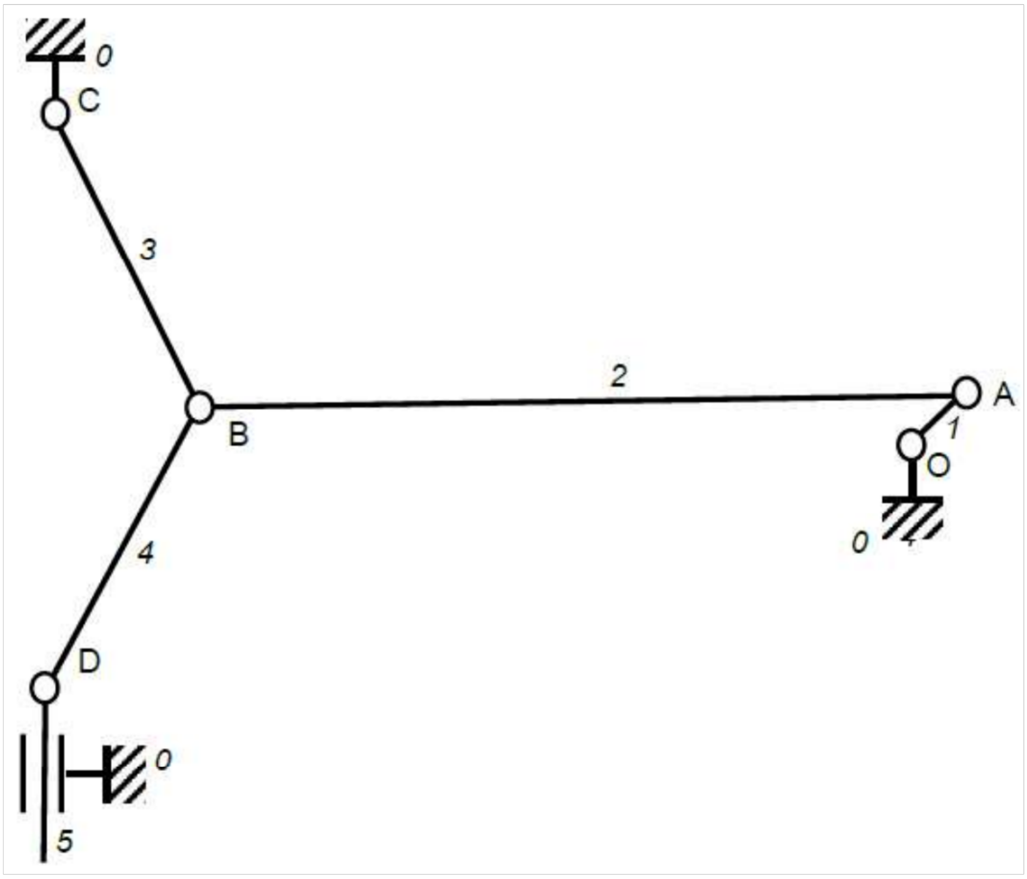
2 – Choisir une échelle adaptée au tracé de $\left\|\vec{V}(A \in 1/0)\right\|$.

3 – Tracer les vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in 1/0)$, $\vec{V}(A \in 2/0)$, $\vec{V}(B \in 2/0)$, $\vec{V}(B \in 4/0)$, $\vec{V}(D \in 4/0)$ et $\vec{V}(D \in 5/0)$ sur le schéma suivant en utilisant uniquement les CIR et la géométrie.

« requirement » Cinématique
Id = ''1.1''
Text = ''Pour former les pièces, il est nécessaire que la vitesse de percussion de la pièce soit au moins de 0,15 m/s.''



4 – Tracer maintenant les vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in 1/0)$, $\vec{V}(A \in 2/0)$, $\vec{V}(B \in 2/0)$, $\vec{V}(B \in 4/0)$, $\vec{V}(D \in 4/0)$ et $\vec{V}(D \in 5/0)$ sur le schéma suivant en utilisant l'équiprojectivité.



5 – Comparer les résultats avec ceux déterminés avec la méthode des CIR.

6 – Conclure par rapport à la problématique

11 Synthèse – à retenir

- La dérivation vectorielle et ses propriétés.
- La relation de changement de base de dérivation.
- La définition, le vocabulaire et les propriétés du vecteur rotation.
- Le vocabulaire associé aux notions de vitesse et d'accélération.
- Le torseur cinématique d'un solide et les relations de composition.
- La relation de Willis.
- L'équiprojectivité, le centre instantané de rotation, les notions de base et roulante.