

SYNTHESE DE TP : SYSTEMES LINEAIRES CONTINU INVARIANTS

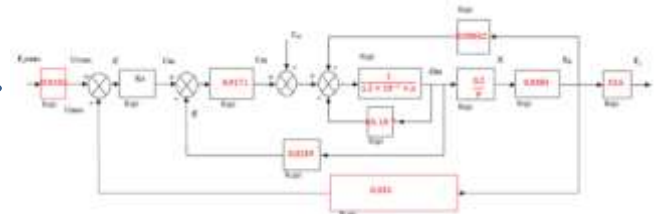
MODELISATION D'UN SYSTEME

1. Modéliser ? Ca consiste en quoi ?

Système réel

→

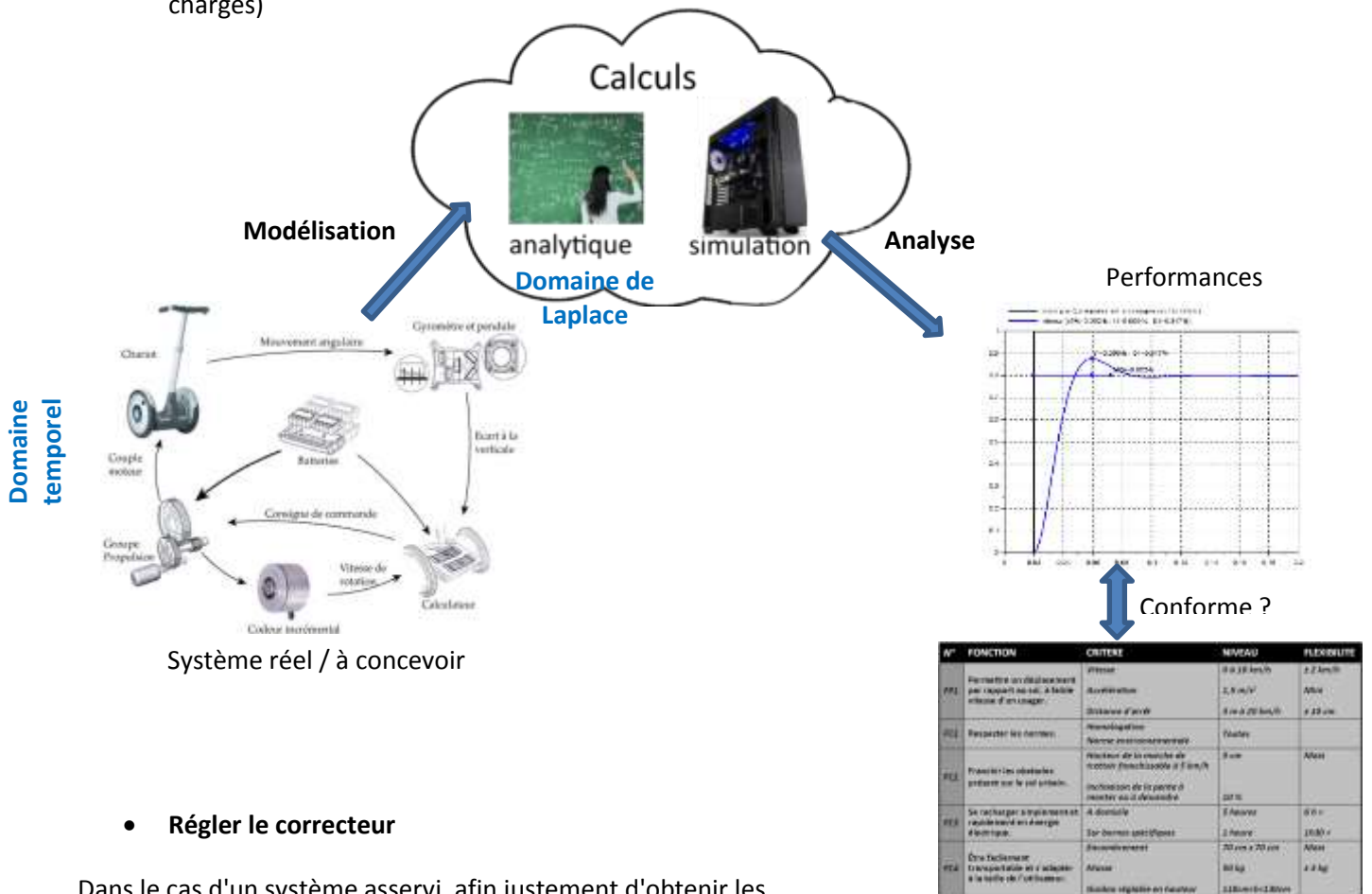
modèle numérique /mathématique



En spé ATS, modèle sous forme de schéma bloc, représentant les fonctions de transfert ($\frac{\text{sortie}}{\text{entrée}}$) en Laplace.

2. Pourquoi modéliser ?

- **Prédire le comportement** d'un système après analyse (notamment afin de valider un cahier des charges)



- **Régler le correcteur**

Dans le cas d'un système asservi, afin justement d'obtenir les performances souhaitées, il faudra implanter un correcteur qui sera calculé en se basant sur le modèle obtenu.

N°	FONCTION	CRITERE	NIVEAU	FLEXIBILITE
FF1	Permettre un déplacement par rapport au sol, à faible vitesse d'avancer	Stabilité Distance d'arrêt	0 à 10 km/h 1,5 m/s ² 0 à 0,20 km/h ± 20 cm	± 2 km/h Avec
FF2	Passer les cahiers	Stabilité	Fluctu	
FF3	Traverser les obstacles présents sur le sol urbain.	Stabilité de la marche de l'robot Inclinaison de la partie à monter ou à descendre	0 cm 20%	Avec
FF4	Se rattraper à tout moment rapidement en cas de panne électrique.	Autonomie	2 heures	0 h
FF5	Être facilement transportable et adapté à la taille de l'utilisateur.	Dimensions Poids	20 cm x 20 cm 80 kg	± 10 kg

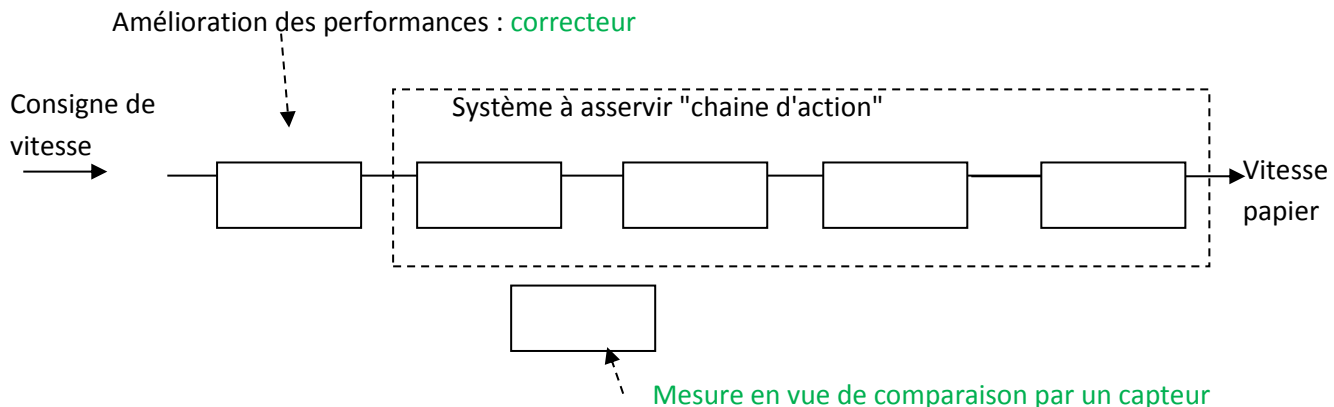
3. Structure du système

Il n'y a ici pas de méthode générale. La structure peut varier complètement d'un système à l'autre. Il faut analyser le flux d'information/énergie et les composants permettant d'aller de la commande à l'action finale.

Rq : Lorsque l'on veut modéliser un composant (ex moteur) par la théorie, ce seront les équations qui donneront la structure

Cependant, cette année, pour des systèmes asservis "simples", on aura souvent la forme suivante :

Exemple : structure de la chaîne de contrôle de la vitesse papier de l'imprimante



4. Obtention des fonctions de transfert par modèle de connaissance

On reconstitue les fonctions de transferts des composants du système puis le schéma complet à partir des lois mathématiques/physiques décrivant le comportement du système (équations différentielles ou simple relation de proportionnalité entrée/sortie)

Ex 1 : modélisation du variateur (hacheur) alimentant le moteur papier de l'imprimante

Pour une consigne microcontrôleur, $N_a=1023$, la tension de sortie U_m vaut $V_{\max}=21,5$ V. Pour $N_a=-1023$, $U_m=-V_{\max}$.

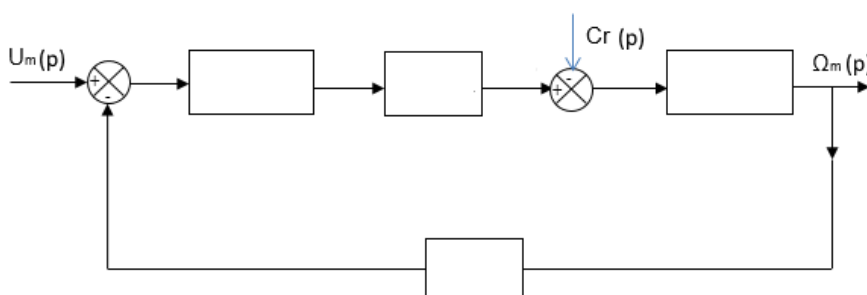
$$H_v(p) = \frac{U_m(p)}{N_a(p)} = \frac{21,5 - (-21,5)}{1023 - (-1023)} = 0,021$$

Ex 2 : modélisation du moteur papier de l'imprimante

Le comportement du moteur est régi par les équations suivantes :

$$(1) u_m(t) = e(t) + R \cdot i(t) \quad (2) e(t) = K_e \cdot \Omega_m(t) \quad (3) C_m(t) = K_t \cdot i(t) \quad (4) J \times \frac{d\Omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

Remplir le schéma bloc modélisant le moteur :



En Laplace :

$$(1) \rightarrow U_m(p) - E(p) = R \times I(p)$$

$$\frac{I(p)}{U_m(p) - E(p)} = \frac{1}{R}$$

$$(4) \rightarrow J \cdot p \times \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

$$\frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_r(p)} = \frac{1}{J \cdot p}$$

Remarque : Les paramètres intervenant dans les modèles théoriques peuvent eux-mêmes faire l'objet d'essais afin de déterminer leur valeur si celles-ci ne sont pas disponibles dans la documentation technique

(ex : TP chariot de golf : mesure de R par essai à rotor bloqué pour le moteur à courant continu)

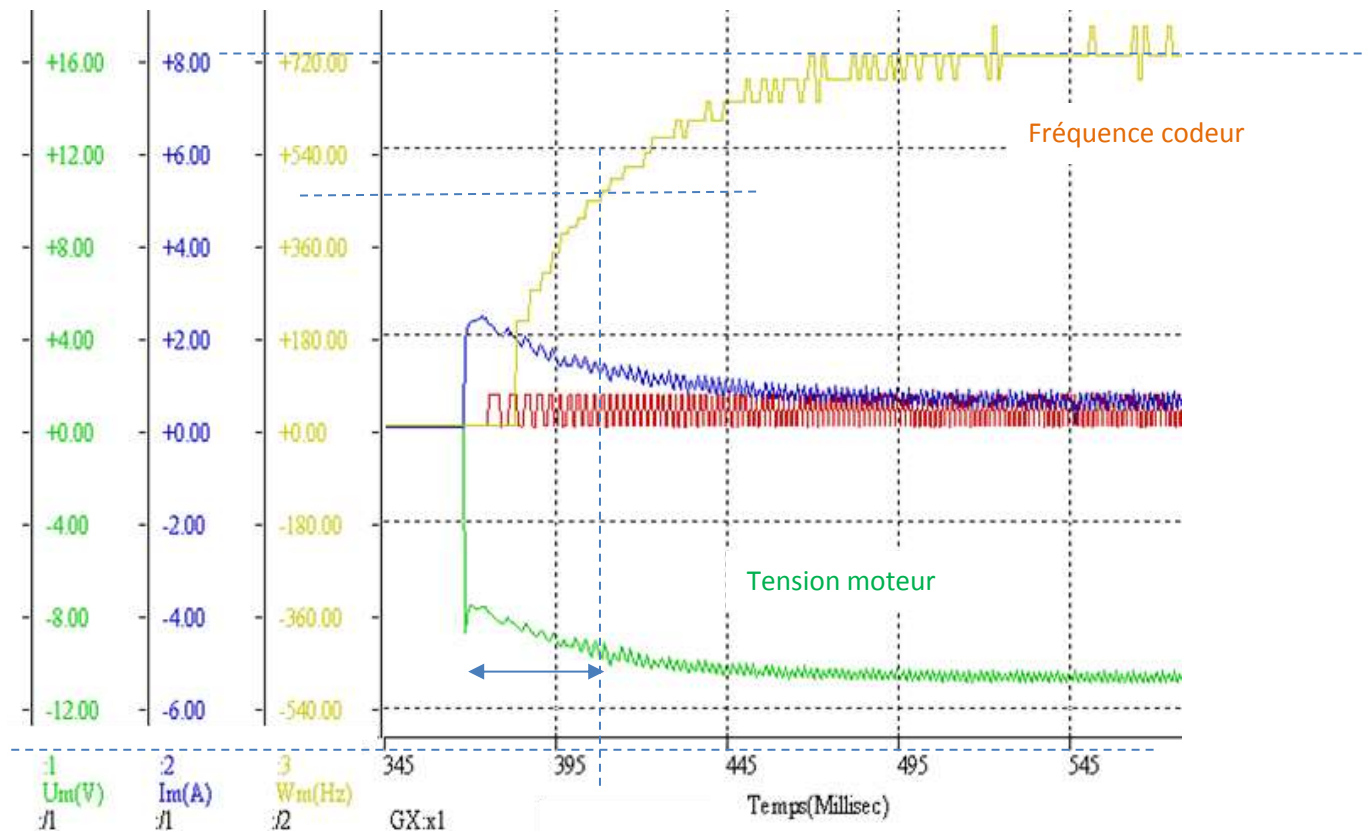
5. Obtention expérimentale du modèle

Essai indiciel

Cet essai consiste à imposer un échelon en entrée du système (ou composant) à modéliser, puis on relève l'évolution de la sortie. En fonction de l'allure de la sortie, on en déduit sa fonction de transfert.

- **Système du 1^{er} ordre** : ex panneau solaire

On a imposé un échelon de tension u_m sur le moteur, le logiciel d'acquisition permet de tracer l'évolution de la fréquence des impulsions du codeur n_c . (cf courbe page suivante)



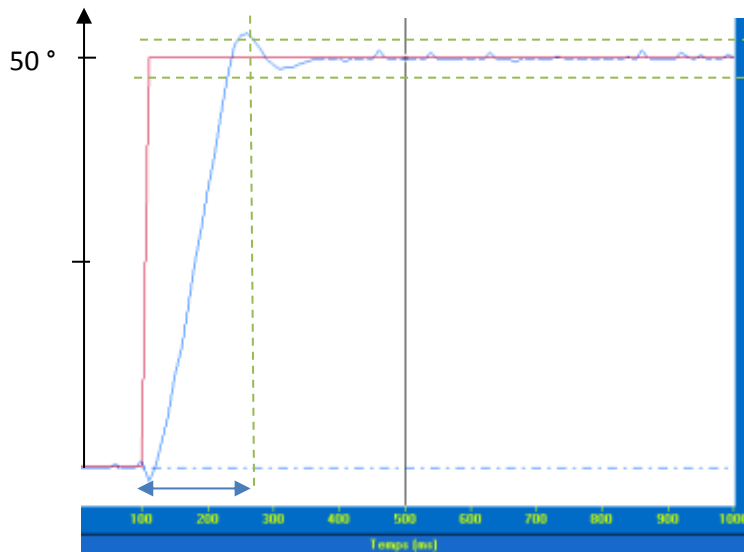
Valeur de l'échelon de tension : 10,5 V (on ne tient pas compte du signe) R_q : pas vrai échelon, échelon rogné par une chute de tension résistive.

- Forme de fonction de transfert : $\frac{N_c(p)}{U_m(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$ car réponse indicielle de forme exponentielle
- Gain statique : $K = \frac{N_{c\infty}}{U_{m0}} = \frac{730}{10.5} = 69,5 \text{ s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$
- Constante de temps : $n_c(\tau) = 0,63 \times N_{c\infty} = 460 \text{ Hz}$,

Lecture graphique : $\tau \approx 40 \text{ ms}$

• **Système d'ordre 2 : ex Maxpid**

Consigne d'angle θ_c en échelon (de 30 à 50°), on observe alors l'évolution de l'angle du bras θ .



a) Forme de fonction de transfert :

$$\frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n^2}}$$

car réponse pseudo

périodique

b) Gain statique : $K = \frac{\theta_\infty}{\theta_{co}} = 1$

c) Facteur d'amortissement :
graphiquement **dépassement $\approx 6\%$**
abaque $\rightarrow \xi \approx 0,7$

d) Pulsation propre :
graphiquement **$tr_{5\%} \approx 170\text{ms}$**
Pour $m = 0,7$: abaques **$w_0 \cdot tr_{5\%} = 3$**
d'où : **$w_n = 17,6 \text{ rad/s}$**

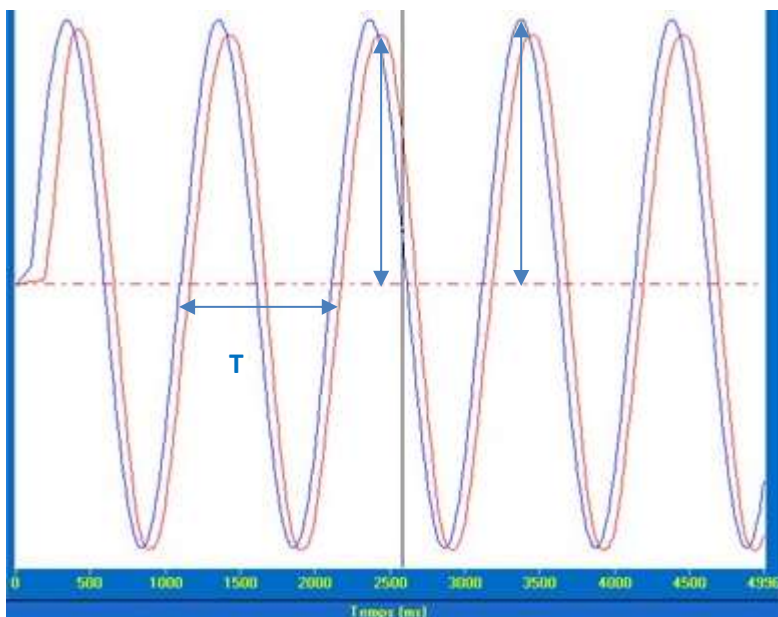
Essai fréquentiel

Dans ce type d'essai, il s'agit de reconstituer point par point un diagramme de bode expérimental. Pour cela, on applique une entrée sinusoïdale de fréquence f et amplitude \hat{E} connu, et on lit l'amplitude du signal de sortie \hat{S} ainsi que son déphasage φ (retard) par rapport à l'entrée.

On obtient alors le point du diagramme de bode :

- abscisse : fréquence f ou pulsation $2\pi f$
- en gain : $G(f) = 20 \log \frac{\hat{S}}{\hat{E}}$
- en phase : φ

Ex : signal issu du Maxpid : consigne d'amplitude crête à crête de 44°



Fréquence : $f = 1/T = 1/1 = 1 \text{ Hz}$

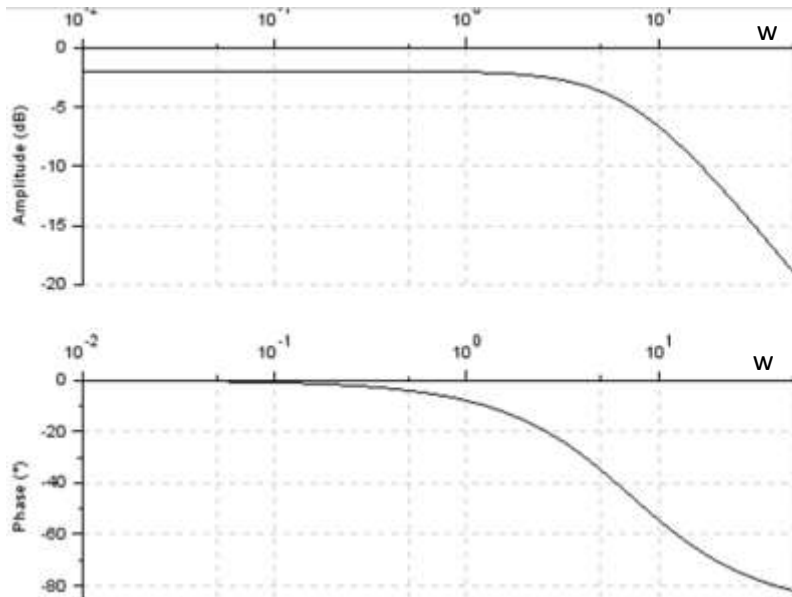
Pulsation : $w = 2\pi \times 1 = 6,28 \text{ rad/s}$

Amplitude du signal de sortie :

$$\text{rapport } \frac{\hat{S}}{\hat{E}} = \frac{3,3}{3,5} = 0,94$$

Déphasage entrée sortie :

En faisant plusieurs fois cet essai mais en variant la fréquence de la sinusoïde d'entrée, on reconstitue le diagramme de Bode expérimental. Il ne reste plus qu'à décoder la fonction de transfert correspondante :

**Forme de la fonction de transfert :**

1 saut en phase de -90° : un 1^{er} ordre au dénominateur

$$\frac{\theta(p)}{\theta c(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}$$

Gain statique :

Asymptote horizontale : $20 \log K = -2\text{dB}$

$$K = 10^{-2/20} = 0,795$$

Constante de temps :

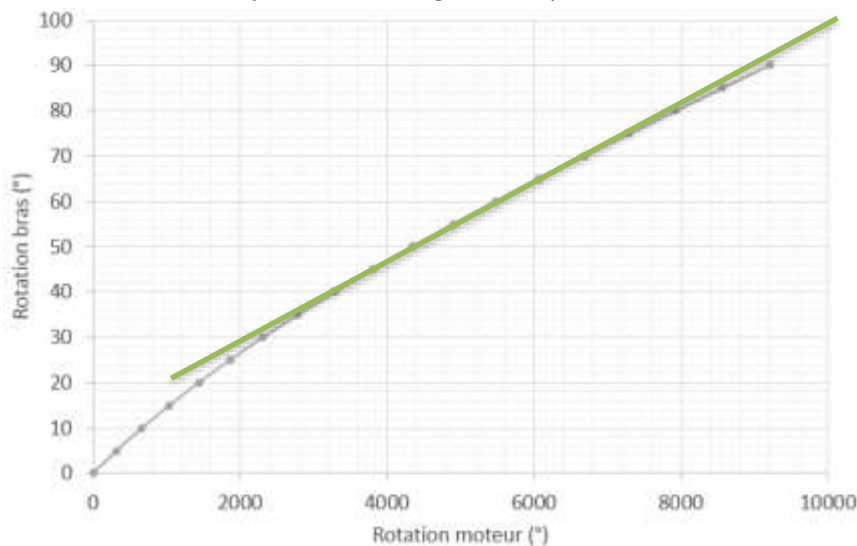
$\varphi(1/\tau) = -45^\circ \rightarrow$ graphiquement $1/\tau \approx 7 \text{ rad/s}$, soit $\tau = 0,143 \text{ s}$

6. Validité du modèle

Lors de la modélisation d'un système (dans le domaine de Laplace), on est souvent amené à émettre des hypothèses simplificatrices ou limiter le domaine de validité du modèle, car on n'est pas exactement dans le cadre d'un système linéaire continu et invariant. Voici quelques exemples rencontrés en TP :

Courbure

Pour modéliser la transformation de mouvement dans le Maxpid (de l'angle de rotation moteur θ_m à l'angle du bras θ_b), un calcul mécanique (fermeture géométrique) aboutit à la courbe suivante reliant les 2 angles :



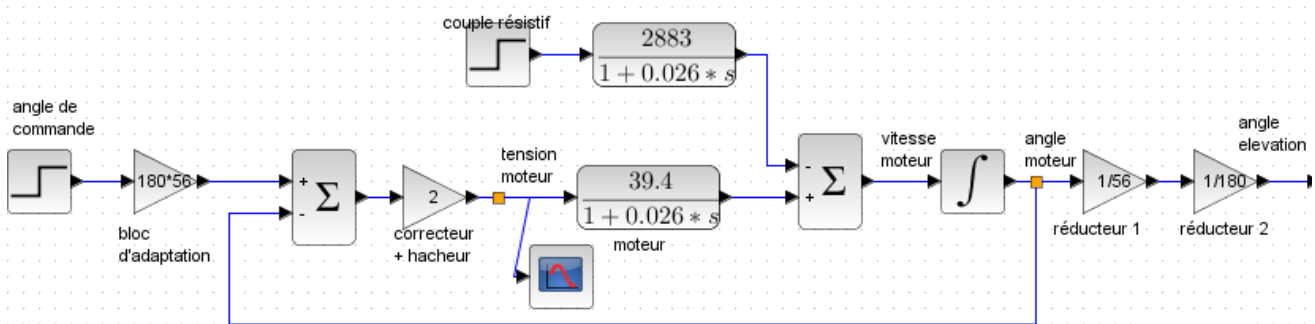
On constate que l'on n'a pas une exacte linéarité. Pour contourner ceci, on prendra comme fonction de transfert $\frac{\theta_b}{\theta_m} = \text{pente sur la zone linéaire}$. Et le modèle choisi sera valable sur cette plage

$$\text{Ici : } \frac{\theta_b}{\theta_m} = \frac{90-30}{9100-2100} = 0,00857 = \frac{1}{117} \text{ valable sur l'intervalle } [30^\circ; 90^\circ].$$

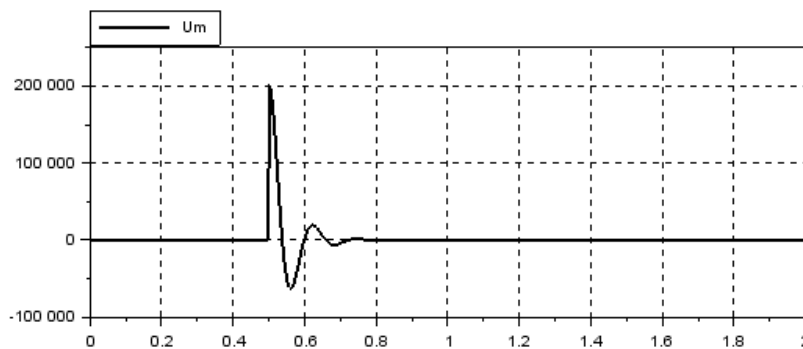
Rq : lorsque la courbe n'a pas de zone de linéarité "claire", on choisit la tangente autour du point de fonctionnement du système.

Limitation en tension

La modélisation de la chaîne d'élevation du panneau solaire aboutit à un système d'ordre 2 représenté par le schéma bloc ci-dessous :



Une simulation a permis d'obtenir la courbe de tension suivante (échelon de commande à $t=0,5s$)



Le moteur étant alimenté par un montage délivrant 12 v au maximum, on constate que la modèle n'est pas réaliste. Il ne tient pas compte d'un phénomène de saturation. (tension moteur limitée à 12V).

Avec cette saturation, le calcul analytique en Laplace n'est plus possible. Par contre, en simulation il suffit de rajouter un bloc saturation.

Remarque : Vous avez effectué d'autres simplifications lors de ces TP's (ayant une portée moins importante), on peut par exemple citer :

- Constante de temps électrique négligée pour les moteurs (ex TP maxpid 1 : le moteur est assimilé à un 1^{er} ordre)
- SEUIL /couples de perturbation considérés constants ou négligés

Conclusions :

- Précision / complexité du modèle à moduler en accord avec les tolérances du cahier des charges. (inutile d'essayer de trouver un modèle précis au pourcent près si tolérance de 30% dans le cahier des charges)
- Avoir conscience des limites du modèle afin de pouvoir approfondir par la suite par d'autres essais /analyse et notamment des comparaisons avec un système réel (prototype)