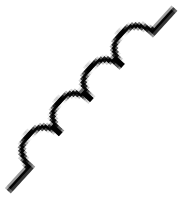
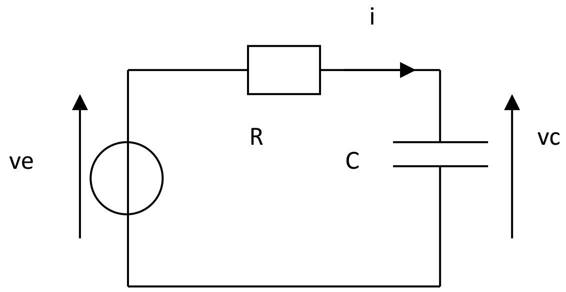
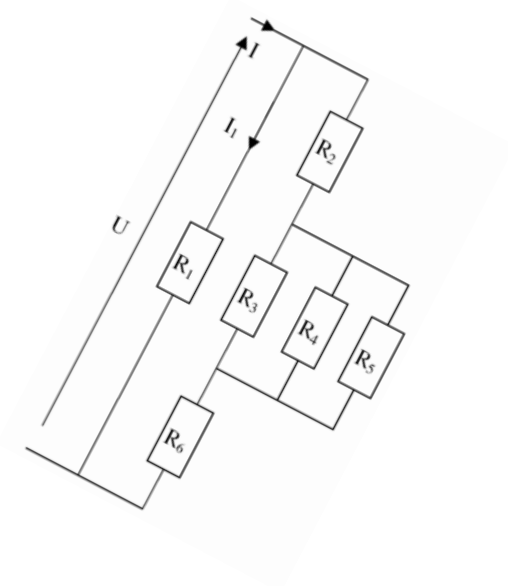
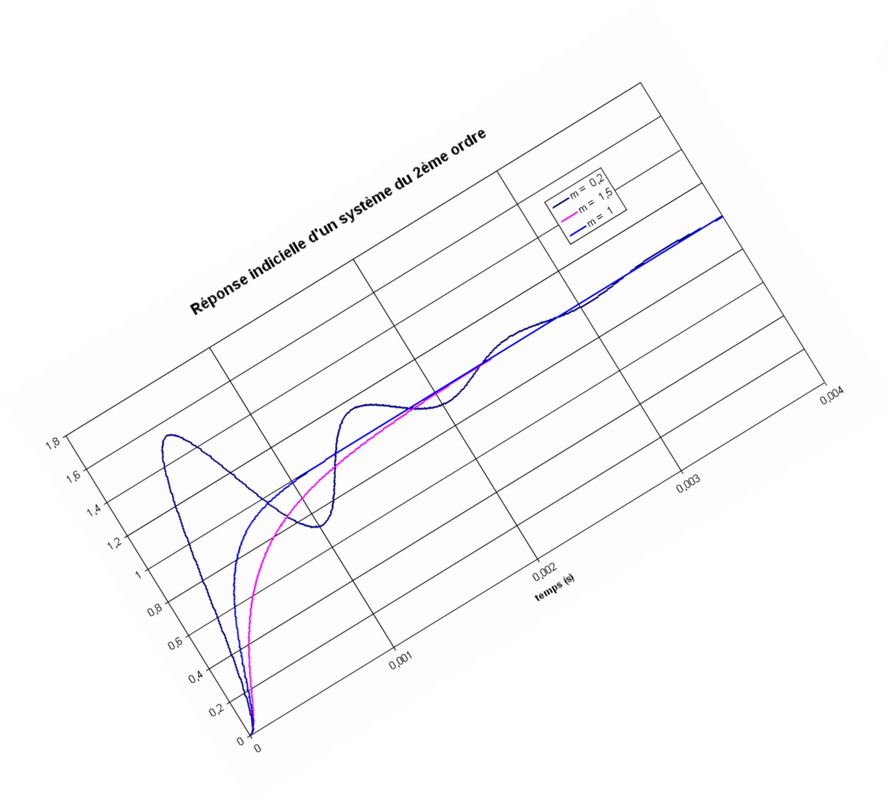


$$\frac{d^2x}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{1}{a}f(t)$$

ELECTROCINETIQUE







Sommaire

A - FONCTIONNEMENT D'UN DIPOLE

1. GENERALITES

a. Courant électrique

On appelle courant électrique tout déplacement de porteurs de charges.
- Par convention, le sens du courant électrique (représenté par une flèche) est celui dans lequel se déplaceraient les charges positives (donc sens inverse des électrons). Il est généralement compté positif de la borne + du générateur à la borne – dans le circuit extérieur.
- L'intensité d'un courant (notée i) est un débit de charges : $i = \dfrac{dq}{dt}$
- Unités : i en ampères (A) - q en coulombs (C) - t en secondes (s)

b. Différence de potentiel

Les porteurs de charges se déplacent sous l'action d'un champ électrique E correspondant à la différence de potentiel (ou « ddp » ou encore « tension ») :

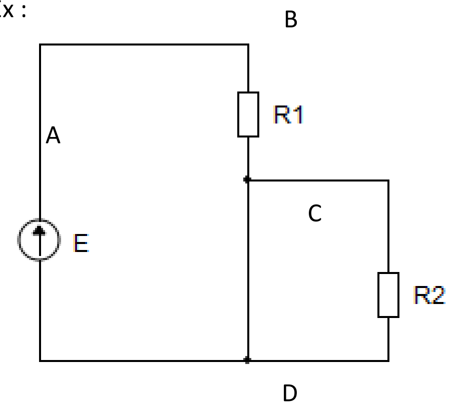
$$u_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B E dx$$

Unité de la tension : le volt (V)

On peut faire une analogie avec l'hydraulique : la différence de potentiel électrique représente la différence de hauteur d'un cours d'eau et le courant électrique représente le débit du cours d'eau.

<u>Remarques :</u>
- Dans un circuit, on appelle masse le potentiel que l'on prend pour référence (au niveau 0V). Symbole : 
- La tension U_{AB} par une flèche **allant de B vers A.**
- Le potentiel est le même le long d'un fil. La tension aux bornes d'un fil est donc nulle.

Ex :



On donne E=6 V.

V_A= V_B=

V_C= V_D=

U_{R1}=

U_{R2}=

c. Additivité

A une bifurcation (ou nœud) les intensités s'ajoutent $i = i_1 + i_2$ Figure 1-1
- Le long d'une branche, les tensions s'ajoutent $u = u_{AB} = u_{Ac} + u_{CB}$ Figure 1-2

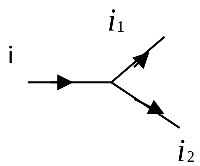


Figure 1-1

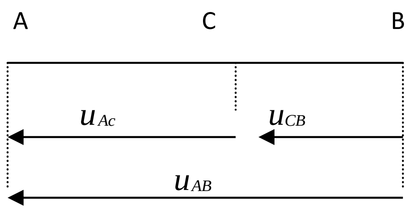


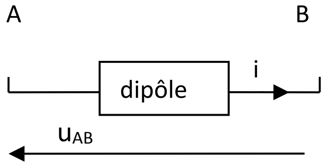
Figure 1-2

2. Notion de dipole

a. Définition

C'est un composant ayant deux pôles A et B.
Les deux grandeurs qui le caractérisent sont :

- l'intensité i
- La tension u_{AB}



b. Conventions (fléchage de tension et courant)

Lors de l'exploitation d'un schéma électrique en vue de faire des calculs, il faut au préalable flécher les courants et les tensions. On procède comme suit :

- Orientation du courant : on choisira de flécher les courants sortant des générateurs, puis on suivra le sens "logique" d'écoulement du courant dans le circuit

- Orientation de la tension : elle est indépendante du choix de l'orientation de l'intensité. 2 conventions existent : Convention *générateur et récepteur* (figure 1-4). En convention générateur, u et i sont de même sens tandis qu'en convention récepteur, u et i sont de sens contraire.

  On utilisera généralement la convention générateur pour les sources (tension et courant) et la convention récepteur pour les dipôles passifs.

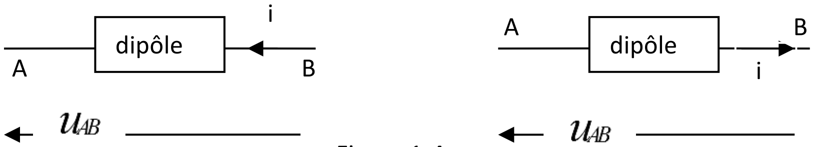


Figure 1-4

c. Relation « courant-tension »

Les dipôles sont caractérisés par une relation u = f(i) ou i = f(u) reliant la tension u à leurs bornes au courant i les traversant. Cette relation dépend des dipôles, elle peut être une fonction linéaire, affine, etc.

La représentation graphique (dans le plan (u,i) ou (i,u)) de cette relation s'appelle *caractéristique* (figure 1-6)

Si cette caractéristique passe par l'origine (i = 0, u = 0), le dipôle est dit *passif* ; dans le cas contraire, il est *actif.*

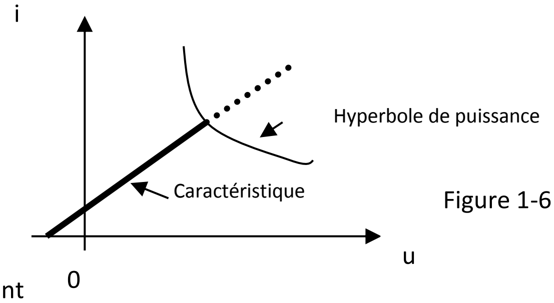


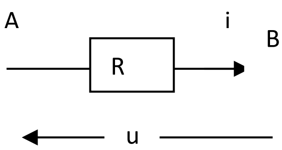
Figure 1-6

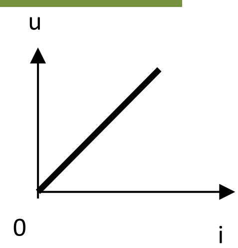
Rq : on peut également tracer l'hyperbole de puissance correspondant à la puissance maximale qu'accepte le dipôle : $P_{max} = u \times i \rightarrow i = \frac{P_{max}}{u}$

c. Les dipôles linéaires élémentaires

<u>*Le conducteur ohmique (résistance)*</u>

En convention récepteur on a u = R.i ou i = G.u
C'est la <u>**loi d'ohm**</u>
R est la *résistance* et s'exprime en ohms (symbole Ω)
G est la *conductance* (1/R) et s'exprime en siemens (symbole S)

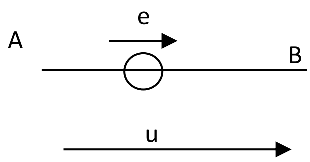


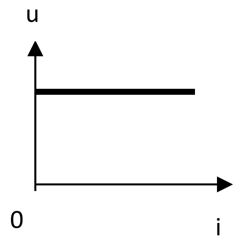


Rq : en convention générateur, on écrirait : u = -R.i ou i = -G.u

<u>La source de tension</u> (idéale)

La relation est u = e quel que soit le courant i
e est appelée *force électromotrice ou fem.*



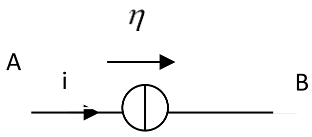


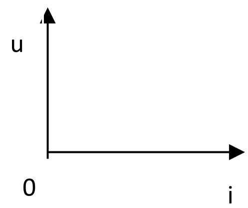
Figures 1-7

<u>La source de courant</u> (idéale)

La relation est i = η quel que soit la tension u

η est appelé *courant électromoteur.*





Figures 1-8

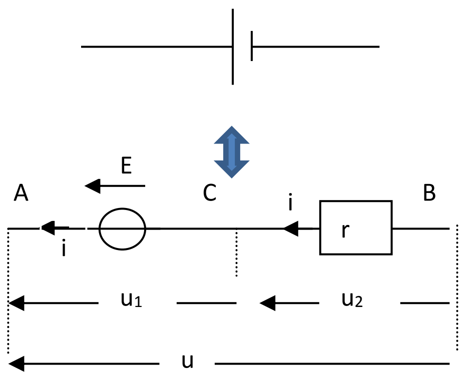
3. REPRESENTATIONS DES DIPOLES LINAIRES REELS

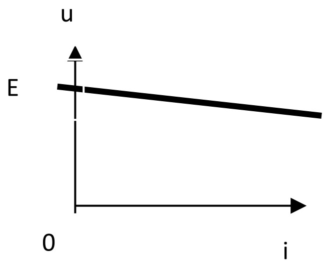
a. Définition

Un dipôle linéaire est un dipôle dont la caractéristique est une droite :

U = a i + b ou i = $\alpha u + \beta$

<u>Ex : source de tension réelle</u>
Une source de tension réelle peut être représentée par une source de tension parfaite E en série avec une résistance interne r.





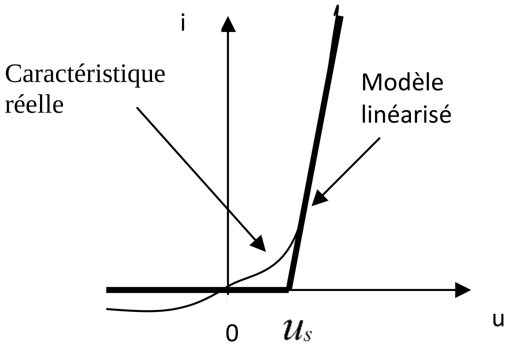
u = ...

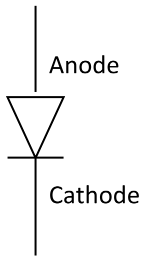
L'équation de la tension aux bornes de la source est : u = ...

b. Linéarisation des dipôles réels

Tout dipôle réel dont la caractéristique peut être schématisée (sur une partie de sa caractéristique) par une droite est dit « *dipôle linéarisé* ». Le traitement est alors simplifié car on remplace une fonction à priori quelconque u = f(i) par une fonction linéaire ou affine.

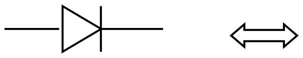
<u>Exemple :</u> diode à jonction. Sa caractéristique ainsi que son modèle sont donnés page suivante :





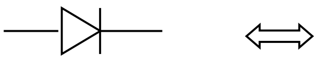
Ainsi, pour ce modèle, on peut écrire :

- si u $\leq$ u_s alors i = . . .



- si u $\geq$ u_s alors
. . . .

Soit : u = ... $\rightarrow$ modèle « source de tension réelle» :



Us est appelée tension de seuil et r : résistance dynamique de la diode.

Remarques :

- Très souvent on néglige la résistance dynamique de la diode, voir même sa tension de seuil, pour les montages de puissance (on parle alors de diode parfaite). La diode passante est alors équivalent à un fil.
- La diode a 2 modèles de comportement suivant la tension à ses bornes. Pour étudier un montage avec une diode, il faut donc étudier les deux configurations possibles (cf TD).

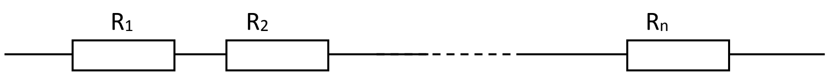
4. Les associations de dipoles ; dipoles equivalents

a. Association en série

2 dipôles sont en série lorsqu'ils sont sur ma même branche donc traversés par le même courant. On a alors additivité des tensions : $\sum_{k=1}^{n} u_k = u$

Dipôles de même nature

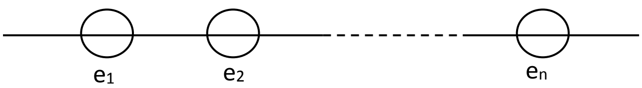
Conducteur ohmique :



u = ...= . . . .= (R_1 + R_2 +…+ R_n) i = R_{eq} × i

Avec $R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$ *résistance équivalente à l'association série*

Source de tension :



u = u_1 + u_2 + …+ u_n = e_1 + e_2 +…+ e_n = e avec e = $\sum_{k=1}^{n} e_k$ fém. *équivalente à l'association série* (Cette somme est algébrique)

Source de courant :

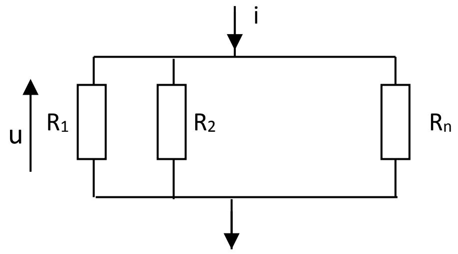
L'association en série de sources de courant idéales n'a aucun sens.

b. Association en parallèle

2 dipôles sont en parallèles lorsqu'ils ont leurs 2 bornes communes, ils sont donc soumis à la même tension. On a alors additivité des courants : $\sum_{k=1}^{n} i_k = i$

Dipôles de même nature

Conducteur ohmique :



i =

i = (G_1 + G_2 +...+ G_n) u = G_{eq}×u

avec G = $\sum_{k=1}^{n} G_k$ *conductance équivalente à l'association parallèle (G=$\frac{1}{R}$)*

soit : $\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$

Rq : *- Cas où il y a uniquement 2 résistances en // :* $\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} =$ *soit Req=*

- *Cas avec n résistances R identiques en // :* $\frac{1}{Req} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R}$ *soit* $Req = \frac{R}{n}$

Remarque *: Pour calculer la résistance équivalente d'un ensemble complexe de résistances, se référer à la fiche de révision de vacances n°2 Req.*

Source de courant :

i = $i_1 + i_2 + ... + i_n = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n = \eta$

avec $\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ courant électromoteur *équivalente à l'association parallèle* (Cette somme est algébrique)

Source de tension :

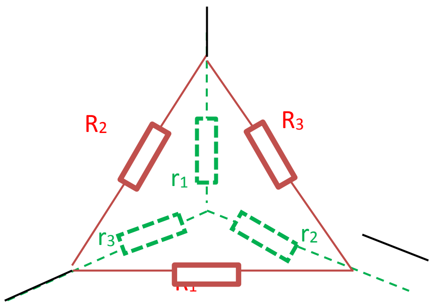
L'association en parallèle de sources de tension idéales est impossible (court-circuit).

c. Association étoile-triangle (facultatif)

Ces transformations sont liées aux associations de dipôles en « triangle » ou en « étoile » ; elles concernent essentiellement les quadripôles.

Le passage de la structure en triangle à la structure en étoile est donné par :

$$r_1 = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$



Le passage inverse s'effectue en considérant les conductances à la place des résistances ($g = \frac{1}{r}$)

$$G_1 = \frac{g_2 \times g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

5. Fonctionnement d'un dipole

a. Point de fonctionnement – droite de charge

Le fonctionnement d'un dipôle est obtenu lorsqu'on relie un dipôle générateur (e;r) ou (η ;g) avec un dipôle recepteur D. (figure 1-15)

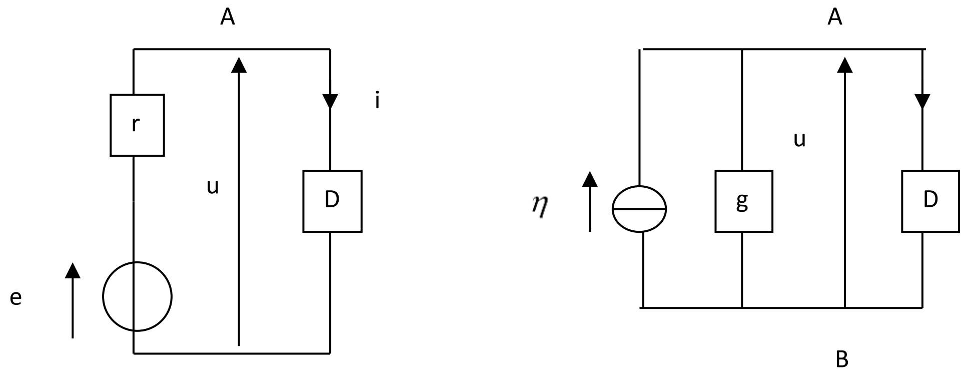


Figure 1-15

La caractéristique du générateur : u = e – r i (ou i = η - g.u) est appelée *droite de charge;* elle est tracée en convention générateur.

La caractéristique du récepteur le dipôle D: u = f(i) ou i = f(u) est tracée en convention récepteur. (figure 1-16)

Le point F, intersection de la droite de charge et de la caractéristique du dipôle est le point de fonctionnement : coordonnées (u_f,i_f)

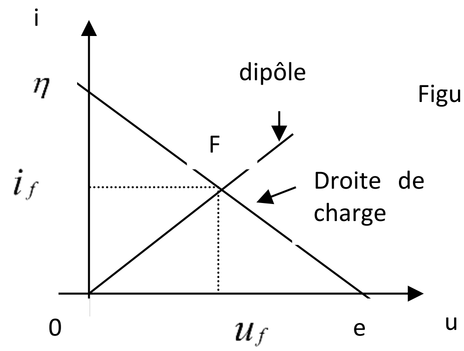
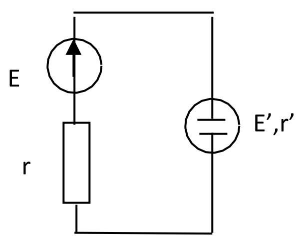
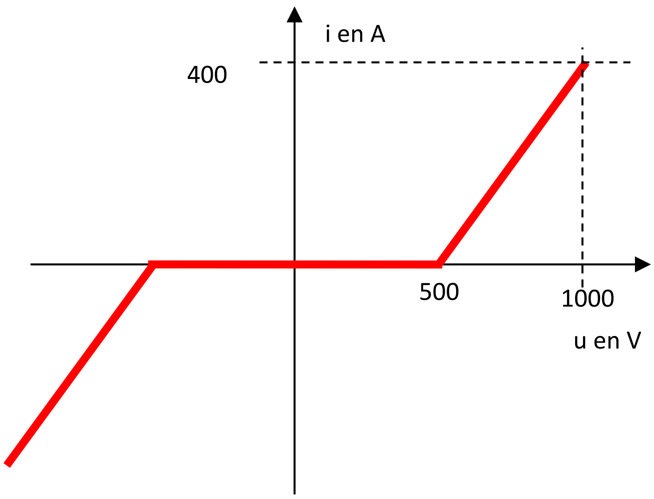


Figure 1-16

Exemple :

On considère le montage suivant dans lequel une source de tension (fem E= 800 V , résistance interne r = 1Ω) alimente un électrolyseur, dont la caractéristique est donnée ci dessous :





Le courant consommé par l'électrolyseur peut être évalué en trouvant le point de fonctionnement du circuit.

a) Equation de la droite de charge

b) intersection

c) résolution analytique

b. Puissance

Généralités

Par définition, c'est l'énergie par unité de temps : $p = \frac{dw}{dt} = u \times i$ (puissance instantanée)

- Unité: La puissance s'exprime en *watt* (symbole: W)

- Si p = Cte, dans le plan (u;i) de la caractéristique d'un dipôle, cette relation devient $u = \frac{p}{i} = \frac{Cte}{i}$;

le graphe correspondant est une hyperbole de puissance (ou d'équi-puissance).

- La caractéristique "courant-tension" d'un dipôle ne doit jamais dépasser l'hyperbole de puissance de ce dipôle (voir figure 1-6)

Puissance consommée et puissance fournie

En **courant continu,** on peut exprimer la puissance consommée $p_c = ui$ par un dipôle.

Attention : en régime sinusoïdal ou quelconque , cette formule n'est plus valide.

En **convention récepteur**, si cette **puissance est positive**, elle est effectivement consommée (on dit que le dipôle est **récepteur** ou dissipateur d'énergie) ; si cette puissance est négative, le dipôle produit alors de l'énergie (il est source d'énergie).

B - LES RESEAUX LINEAIRES EN REGIME PERMANENT

1. GENERALITES

a. Définitions

- On appelle *réseau électrique linéaire* un assemblage de dipôles électrocinétiques linéaires (ou linéarisés) reliés entre eux par des fils conducteurs de résistance négligeable. Pour qu'un réseau fonctionne, il doit comporter au moins un dipôle générateur.
- Un réseau est formé de *branches* reliées entre elles par des *nœuds*, l'ensemble ayant une structure de *mailles*.
- Une *branche* est constituée de dipôles associés en *série* .
- Un *nœud* est une bifurcation reliée à plus de deux branches .
- Une *maille* est un parcours *fermé* le long de différentes branches et ne passant qu'une fois par un nœud donné ; un réseau comporte m mailles.

b. Graphes

Un graphe est une représentation de la topologie d'un réseau réel indépendant de sa forme.

La figure 2-1(a) est le plus petit réseau. Il comporte une branche, une maille et 0 nœud.

La figure 2-1(b) comporte .. . . . nœuds (. . . et . . . .) , ... branches et . . . . . .mailles.

Le réseau (c) comporte . . . . . nœuds , ... branches) et . . . . . mailles .

L'étude d'un réseau consiste généralement à déterminer les Intensités dans toutes ou partie des branches.

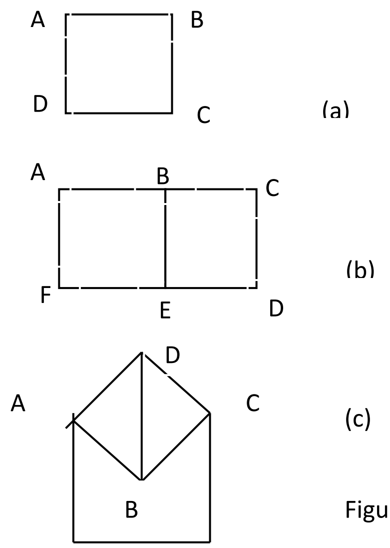


Figure 2-1

2. METHODES DE KIRCHHOFF

a. Principe de l'analyse

La méthode de Kirchoff consiste à **calculer les courants** dans toutes les branches du circuit.

- On dispose de « b » branches, c'est à dire de « b » intensités inconnues ; il faut écrire « b » équations.
- On a « n » nœuds et « m » mailles donc à priori n + m équations (1 équation par nœud et 1 équation par maille). Or n + m > b donc il faut trouver un ensemble complet de *b équations indépendantes*.
- On admet qu'en fait, il y a (n-1) *nœuds indépendants*
- Il faut m' = b – (n -1) *mailles indépendantes.*

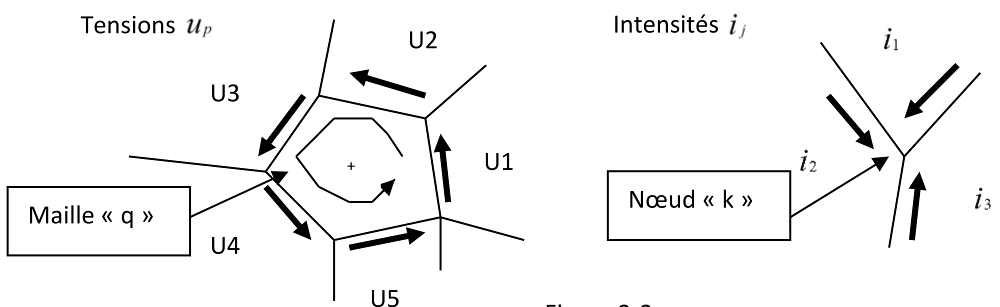


Figure 2-2

Equations des mailles :

Une maille étant un réseau fermé, on écrit : $\Sigma u = 0$

Attention : Ces sommes sont algébriques, le **signe** étant **lié au sens de parcours conventionnel** attribué à chaque maille.

Equation des nœuds :

D'après le principe de conservation de la quantité d'énergie, on écrit : $\Sigma i = 0$ Cette somme est également algébrique.

b. Les équations de Kirchhoff

$$\begin{cases} \Sigma i = 0 & \text{n - 1 équations des nœuds} \\ \Sigma e = \Sigma Ri & \text{m'= b – (n-1) équations des mailles} \end{cases}$$

Ce système est constitué d'équations linéaires et homogènes que l'on peut mettre sous la forme d'une matrice

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}$$

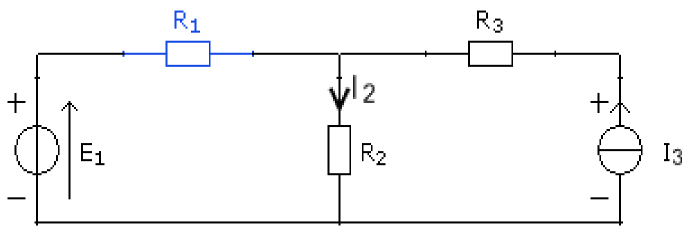
La matrice [r] est la matrice des coefficients (résistances) alors que [i] et [e] sont respectivement les matrices colonnes des intensités et des fem.

c. Résolution

La résolution matricielle devient vite fastidieuse dès lors que le nombre de branches est grand. (Mais c'est ce qui est utilisé dans les logiciels de simulation de circuits électriques !)

On lui préfère les méthodes permettant de « réduire » le nombre d'inconnues. (résolution de système d'équations par substitution)

Exemple : calcul de I_2 dans le circuit suivant.



1) Nombre d'équations nécessaires

2) Convention (flèches sur schéma)

3) loi des mailles (choisir des mailles indépendantes)

4) loi des nœuds

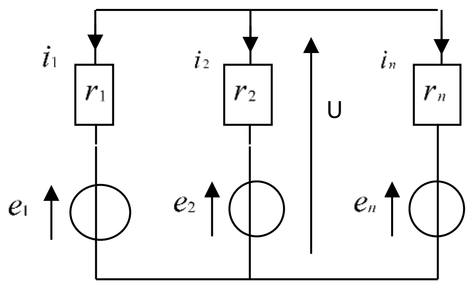
5) Résolution du système

Rq : la méthode stricte de Kirchhoff devient vite fastidieuse lorsque l'on a plusieurs branches. Lorsque la configuration du circuit le permet, on préfère alors utiliser d'autres méthodes de calcul plus efficaces (diviseurs de courant et de tension, Millmann, superposition …)

3. METHODE DES EQUATIONS AUX POTENTIELS ; THEOREME DE MILLMAN

On se propose de déterminer les potentiels à chaque nœud dans un circuit avec n branches en // (contenant des résistances et des résistances uniquement)

- On considère les « n » branches qui relient deux nœuds A et B
- Chaque branche est parcourue par un courant i_n et comporte une résistance r_n et une fem e_n.



La loi des nœuds au point A : $(i_1 + i_2 + ... + i_n = 0)$

Ce qui conduit à : $$\frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_A - V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_A - V_n}{R_n} = 0$$

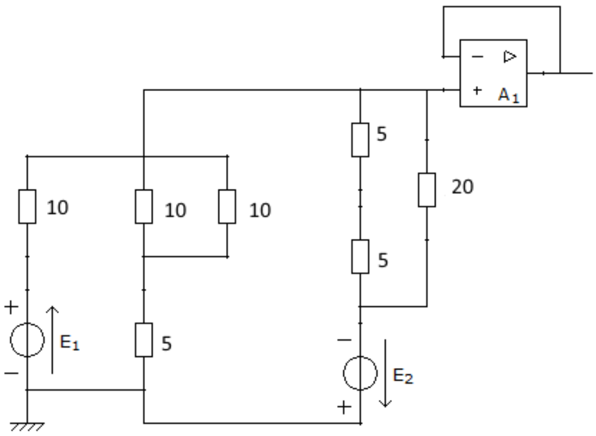
$$\leftrightarrow \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_A}{R_n} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_n}{R_n}$$

soit : $V_A = \dfrac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$

En remplaçant ici les potentiels par les tensions correspondantes, si l'on place la masse au point commun des générateurs de tension:

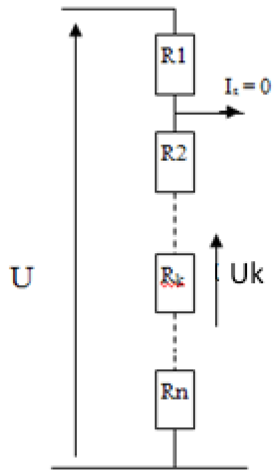
$$U = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \cdots + \frac{e_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

Exemple : on souhaite calculer le potentiel à l'entrée + de l'AOP A1 (supposé à impédance d'entrée infinie : soit $i_+ = 0$) dans le circuit ci-dessous. ($E_1 = 10$ V, $E_2 = 5$V)



4. Montages particuliers : diviseur de tension, diviseur de courant

a. Diviseur de tension



Le diviseur de tension s'applique lorsque l'on a n résistance **EN SERIE**, que l'on connait la tension aux bornes de ces résistances et que l'on veut calculer la tension aux bornes de l'une de ces résistances. (cf schéma ci-contre).

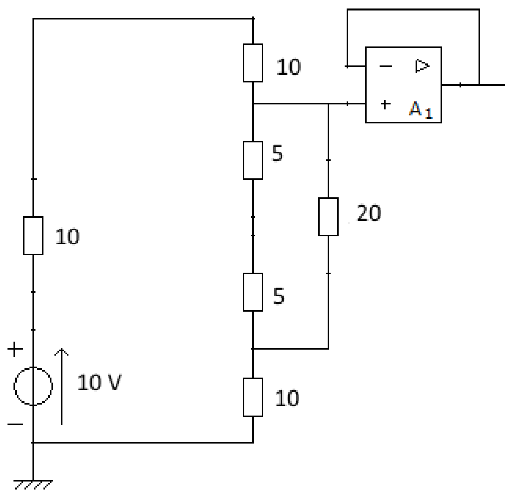
Formule générique :

$$U_k = \frac{R_k}{\sum R_i} \times U$$

Attention : U_k est bien la tension aux bornes de R_k et U la tension aux bornes de l'ensemble des résistances en série.

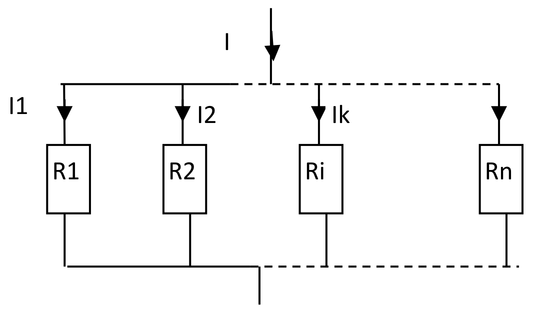
Exemple d'application : calcul de V+ de l'AOP A1

Rq : L'AOP est supposé avoir une impédance d'entrée infinie, courants d'entrée nuls)



b. Diviseur de courant

On s'intéresse ici au courant dans une résistance parmi un réseau de n résistance en //.



Diviseur de courant

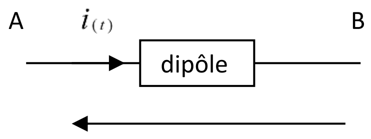
$$\mathbf{I_k} = \frac{\mathbf{G_k}}{\sum \mathbf{G}} \times \mathbf{I}$$

LES REGIMES TRANSITOIRES DES DIPOLES LINEAIRES PASSIFS

1. Definitions

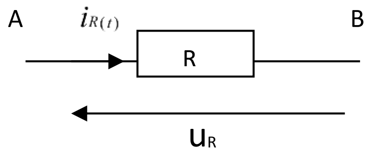
- Un *régime permanent* est un régime qui se maintient au cours du temps (Exemple : régime continu ou régime sinusoïdal)
- Un *régime transitoire* est le passage d'un régime permanent à un autre régime permanent.
- La *constante de temps* τ permet d'évaluer la durée du régime transitoire.

2. Relations « courant-tension » des dipoles elementaires



C'est une relation linéaire $u_{(t)} = f_{(i(t))}$ ou $i_{(t)} = f_{(u(t))}$
en convention récepteur des trois dipôles fondamentaux.

a. Le conducteur ohmique de résistance R

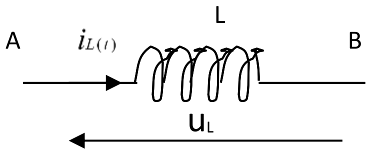


La relation est exprimée par la loi d'*ohm* :

$$\boldsymbol{u_R = R \times i_R}$$

ou $i_R = G \times u_R$ (Rappel : avec G conductance : G = 1/R)

b. La bobine d'inductance propre L



La loi de *Lenz-Faraday* décrit le phénomène d'induction propre :

$$\boldsymbol{u_L(t) = L \times \frac{d\, i_L(t)}{dt}}$$

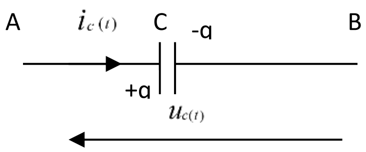
- Le coefficient L appelé *inductance propre* (ou *auto-inductance*) s'exprime en *henrys* (H).
  Ordre de grandeur :

- Cette tension u_L ne pouvant être *infinie*, l'intensité i_L doit être une grandeur *continue.*

→ Pas de saut de courant dans L. (L s'oppose aux variations du courant)

- En régime permanent, avec des sources en courant continu, (d/dt = 0), on a u=0 quel que soit le courant passant dans l'inductance, l'inductance est alors équivalente à un fil. (propriété à utiliser pour calculer le régime permanent sans avoir à passer par un calcul d'équations différentielles)

c. Le condensateur de capacité C



Soit q(t) la charge électrique de l'armature telle que

$i_c = \frac{d\, q_c}{dt}$ avec $q_c = C \times u_c$

d'où $\boldsymbol{i_c(t) = C \times \frac{d\, u_c}{dt}}$

Le coefficient C appelé *capacité* s'exprime en *farads* (F) ou en sous-multiple.

Cette intensité i_c ne pouvant être *infinie*, la tension u_c doit être une grandeur *continue.*

→ Pas de saut de tension aux bornes de C (C s'oppose aux variations de tension)

En régime permanent (avec des sources constantes, donc en courant continu) , d/dt=0 donc i=0, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

Energie emmagasinée : $W = \int u.i\,dt = \int u.C.\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}C.u^2$

Remarque :
Les relations précédentes ne sont valables qu'en convention RECEPTEUR. En convention générateur, les relations précédentes s'écrivent respectivement :

$u_{R(t)} = -Ri_{R(t)}$ $u_{L(t)} = -L\frac{di_{L(t)}}{dt}$ $i_{C(t)} = -C\frac{du_{c(t)}}{dt}$

3. CLASSIFICATION DES SYSTEMES

Pour déterminer l'évolution du courant ou de la tension dans un circuit électrique, on est amené à établir une équation différentielle. On peut alors classifier le circuit suivant deux catégories de système :
- Du premier ordre caractérisé par un seul paramètre et décrits par des équations différentielles du premier ordre.
- Du deuxième ordre caractérisé par deux paramètres et décrits par des équations différentielles du deuxième ordre.

4. METHODE GENERALE DE RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

a. Règles générales

1) Quand on modifie un circuit (application d'une tension, ouverture, fermeture, changement d'état d'un interrupteur mécanique ou statique), la variable x est donnée par la solution d'une équation différentielle où la perturbation est portée au second membre. (équation différentielle obtenue par application des lois de Kirchoff)

Cette solution est la somme de deux termes :
- La ***solution générale*** de l'équation homogène ; elle donne *le **régime libre*** « x_l » qui est toujours une fonction décroissante du temps (amortissement dû aux résistances).

- La ***solution particulière*** de l'équation avec second membre ; elle donne le ***régime forcé*** « x_f » qui est celui que la perturbation tend à imposer au circuit. Si le régime permanent avait le temps de s'établir, seul le régime forcé subsisterait.

2) La solution générale fait intervenir un nombre de *constantes d'intégration* égal à l'ordre de l'équation différentielle. Leur valeur est déterminée par les conditions initiales :

On utilisera les valeurs qui ne peuvent subir de discontinuité :
- Cas du courant dans une inductance
- Cas de la tension aux bornes d'un condensateur.

Rappel : propriétés des inductances et condensateurs dans des circuits en régime continu

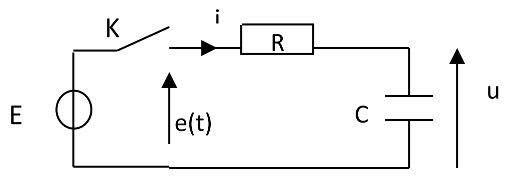
Propriétés des condensateurs :
- En régime établi (u = constante), la capacité se comporte comme un circuit ouvert.
- En régime quelconque, la tension aux bornes d'une capacité ne peut subir de discontinuité.

Propriétés des inductances :
- En régime établi (i = constante), l'inductance se comporte comme un court-circuit .
- En régime quelconque, le courant dans une inductance ne peut subir de discontinuité.

b. Circuits dont l'équation différentielle est du premier ordre

Exemples :

Circuit « RC » , évolution de u(t)



Conditions initiales : (CI)

u_0= 0

à t=0 , on ferme K

1) Mise en équation :

Dans le circuit valable pour t > 0, on utilise les lois de Kirchoff (maille + nœud) et les relations propres aux condensateurs et inductances pour trouver l'équation différentielle.

Ici, 1 branche donc, 1 équation dans Kirchoff, équations pour t > 0 :

loi des mailles : . . . . , loi de comportement de C : . . . .

On obtient : . . . . (1)

Rq : on privilégiera l'écriture de l'équation différentielle sous la forme : f(t)= x + τ ×$\frac{dx}{dt}$ (coefficient unitaire sur le terme non dérivé)

2) Résolution de l'équation

a) Equation homogène : dont la solution correspond au régime libre du circuit (sans sources)

0 = u + RC× $\frac{du}{dt}$ (2) → u_l(t)= . . . .

avec τ=RC et A constante que l'on déterminera grâce aux CI

b) solution particulière : correspond au régime forcé (comportement imposé par les sources en régime permanent)

On cherche une solution u_f(t) de la même forme que le second membre. Ici le second membre est une constante. On cherche donc u_f(t)=K.

On remplace dans l'équation de départ (1) u par K , on trouve : K= u_f(t) =. . . . .

Rq : Dans le cas d'une équation différentielle posée sous la forme canonique d'élec, avec un second membre constant, la solution particulière sera égale à ce second membre.

c) solution globale :

La solution globale est la somme du régime libre et du régime forcé : u(t)= u_l(t) + u_f(t) = ...

d) détermination des constantes grâce aux CI:

La condition initiale donne u(0) = ... soit . . . .→ . . . .

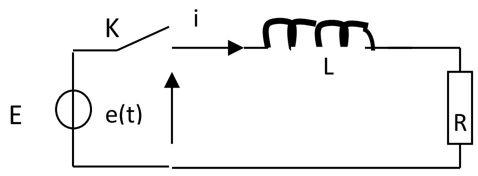
La solution est donc : u(t) = ...

Expression de i(t) : . . . .

On peut tracer le chronogramme de la variable (cf page suivante) :

Rq : L'étude serait identique dans un circuit comportant une inductance

Circuit « RL »



à t= 0 , on ferme K.
A t=0 : i=0.

Rq : Si les conditions initiales ne sont pas données, il faut les déterminer en utilisant les propriétés de L et C en régime permanent (en effet, la condition initiale pour t>0 correspond à la condition finale pour t<0)

c. Circuits dont l'équation différentielle est du deuxième ordre

Pour un circuit du deuxième ordre, la méthode reste la même, l'unique point qui va changer concerne la résolution de l'équation sans second membre.

1) mise en équation

a) On applique les lois de Kirchhoff et la loi de comportement du condensateur afin d'obtenir un système d'équation.

b) On procède par substitution afin d'élimer les variables non demandées, et ainsi aboutir à une équation différentielle de la forme :

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=f(t)$$

c) On met l'équation précédente sous forme canonique:

$$\frac{1}{w_0{}^2} \times \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2m}{w_0} \times \frac{d\,x}{dt} + x = \frac{1}{c} \times f(t)$$

On exprime (ou calcule) w_0 et m en fonction des paramètres du circuit.

2) résolution de l'équation

a) Equation homogène (EH) :

$$\frac{1}{w_0{}^2} \times \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2m}{w_0} \times \frac{d\,x}{dt} + x = 0$$

La solution du régime libre est de la forme : $X_l = A_1.e^{r1.t} + A_2.e^{r2.t}$

Avec A_1 et A_2 constantes se déduisant des conditions initiales et r1 et r2 racines de l'équation caractéristique

$$\frac{1}{w_0{}^2} \times r^2 + \frac{2m}{w_0} \times r + 1 = 0 \ \leftrightarrow r^2 + 2m.w_0.r + w_0{}^2 = 0$$

Suivant la valeur de m, le déterminant :$\Delta = 4m^2\omega^2_0 - 4\omega^2_0 = 4\omega^2_0(m^2-1)$ sera positif, nulle ou négatif. La forme de la solution changera suivant la valeur de m par rapport à 1.

Trois cas possibles :

- **m>1** amortissement fort : deux racines réelles,

régime libre apériodique amorti avec pour solution :

$X_L(t) = A_1.e^{r1.t} + A_2.e^{r2.t}$

avec $r_1 = -m.w_0 + w_0.\sqrt{m^2-1}$ et $r_2 = -m.w_0 - w_0.\sqrt{m^2-1}$ (solutions de l'équation caractéristique)

- **m=1** amortissement critique : une racine double : régime libre apériodique amorti

solution : $X_L(t) = (A_1.t + A_2).e^{r.t}$ avec $r_1 = r_2 = r = -m.\omega_0 = -\omega_0$

- **m<1** amortissement faible → deux racines complexes : régime libre pseudo périodique

solution :

$X_L(t) = e^{-m.\omega_0.t}\,[A_1.\cos(\omega t) + A_2.\sin(\omega t)]$ avec : $\omega = \omega_0.\sqrt{1-m^2}$

b) La solution particulière

Elle dépend de la forme du second membre ; c'est le régime forcé.

Même méthode que pour une équa diff d'ordre 1 :

Si f(t) = constante = E : on cherche Xf sous la forme d'une constante. On pose Xf=B puis on remplace x par B dans l'équation différentielle de départ

Rq : Si f(t) = $E_M \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow X_f = A.\cos \omega t + B.\sin \omega t$

c) Solution globale

La solution globale est donnée par la somme de la solution de l'équation homogène et par la solution particulière.

$X(t)=X_L(t)+X_F(t)$

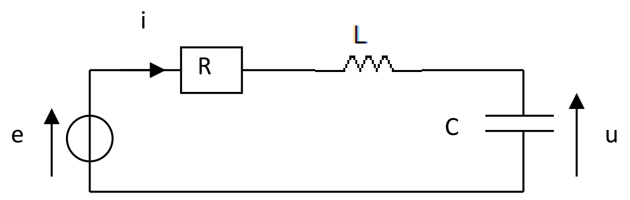
d) Détermination des constantes

Pour obtenir l'expression complète de X(t), il reste à déterminer les constantes A_1 et A_2. Pour cela il faut utiliser 2 conditions initiales (courants dans les bobines et tensions aux bornes des condensateurs)

3) Exemples : Mise en équation d'un montage de base :

« RLC » série alimenté par un générateur de tension. (figure 1). Pour t<0, e(t) = 0 et pour t>0, e(t)=E=Cste.

- Rq : on prendra R=10Ω, L=1mH et C= 10µF. Les conditions initiales sont à déterminer par vous-même.



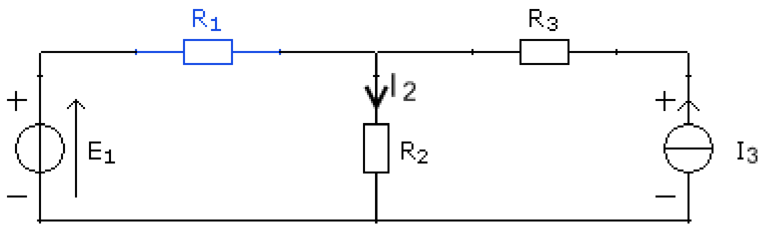
D - AUTRES METHODES DE CALCUL DANS UN CIRCUIT (FACULATIF)

1. THEOREME DE SUPERPOSITION

L'intensité dans une branche d'un réseau, lorsque ce circuit comporte plusieurs générateurs, est égale à la somme des intensités, dans cette même branche, que ferait passer chaque source agissant seule, les autres étant rendues passives.

Rq : rendre passives des sources (les éteindre), cela signifie annuler les fém « e » et (ou) les courant électromoteurs « η ». (soit encore remplacer le générateur de tension par un court-circuit et ouvrir le circuit contenant le générateur de courant) .

Ex : Calcul de I_2 dans le même circuit



1) On ne garde que E_1, on passive la source de courant I_3 .

a) circuit sans I_3

b) calcul de I'_2 dans le circuit correspondant

2) On ne garde que I_3, on passive E_1 :

a) circuit sans E_1

b) calcul de I''_2 dans le circuit correspondant

3) Solution finale

$I_2 = I'_2 + I''_2$

Rq : Dans la pratique, si le nombre de générateur est supérieur à 3, cette méthode devient fastidieuse et on préfère utiliser d'autres méthodes.

2. THEOREME DE THEVENIN

Le théorème de Thévenin assure que toute portion d'un circuit (peu importe le nombre de générateurs, conducteurs ohmiques, mailles, nœuds) peut être modélisée par un seul générateur en série avec un conducteur ohmique.
On va alors utiliser cette propriété pour simplifier notre circuit et ainsi calculer facilement le courant dans la branche voulue.
Dans le circuit ci-dessous, on va donc remplacer l'ensemble E_1+R_1+R_3+I_1 par son modèle de Thévenin.

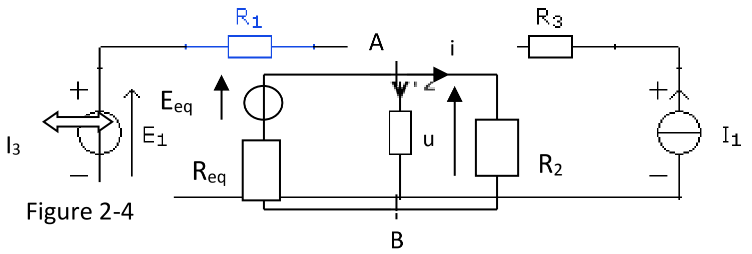


Figure 2-4

Le réseau linéaire vu des points A et B va donc être remplacé par l'association en série d'une source de tension idéale de fem E_{eq} et d'un conducteur ohmique de résistance R_{eq}, dans laquelle E_{eq} et R_{eq} sont calculées de la manière suivante :

- E_{eq} est la tension à vide qui apparaît entre A et B.
- R_{eq} est la résistance équivalente entre A et B, les sources étant rendues passives.

Méthode "classique" de calcul :

1) On redessine le circuit de départ en ôtant
la branche dans laquelle on veut calculer le courant : ⟶

a) calcul de Req :
On passive les sources, puis on calcule la résistance équivalente entre A et B (R_2 déconnectée)

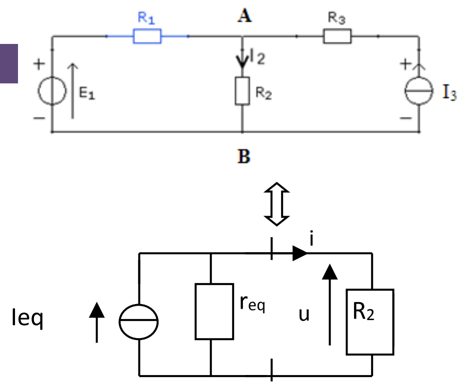
b) calcul de Eq
Calcul de la tension U_{AB} à vide (R2 déconnectée)

2) Calcul de i dans le schéma équivalent avec la branche "à calculer" reconnectée

3. THEOREME DE NORTON

Enoncé :

- « Un réseau linéaire vu des points A et B peut être remplacé par un générateur de courant unique constitué par l'association en parallèle d'une source de courant idéale de courant électromoteur et d'un conducteur ohmique de résistance Req.
  - I_{eq} est le courant de court-circuit entre A et B.
  - R_{eq} est la résistance équivalente entre A et B, sources passives.



Méthode "classique" de calcul :

1) On redessine le circuit de départ en ôtant
la branche dans laquelle on veut calculer le courant : →

b) calcul de Req :
On passive les sources, puis on calcule la résistance équivalente entre A et B (sans branche R_2)

c) calcul de Ieq
Calcul du courant entre A et B en mettant la branche à calculer en court circuit

2) Calcul de i dans le schéma équivalent avec la branche "à calculer" reconnectée

4. EQUIVALENCE THEVENIN – NORTON (DUALITE)

Les représentations de Thévenin et Norton sont des formes duales, autrement dit, le générateur de tension (E_{eq},R_{eq}) est remplacé par un générateur de courant (I_{eq},R_{eq}), avec $I_{eq}=\frac{E_{eq}}{R_{eq}}$.

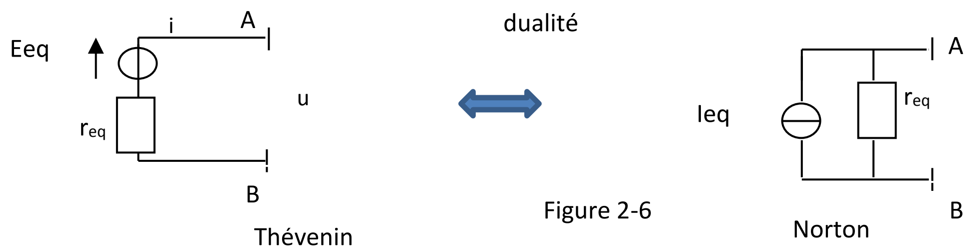


Figure 2-6

Exemple d'utilisation :

Calcul du courant I dans le schéma ci-dessous :