

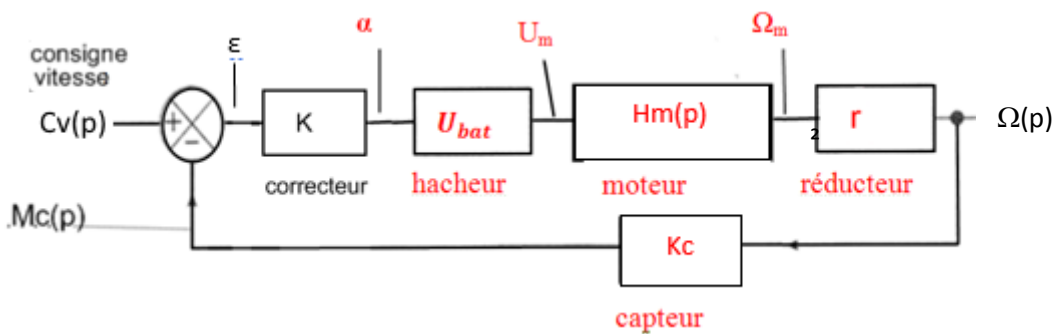
ANALYSE DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

Une fois que le schéma bloc du système à étudier a été défini, nous allons utiliser les propriétés de calcul en Laplace afin de prévoir/calculer relativement simplement les caractéristiques du système.

I - LECTURE DE SCHEMA BLOC

Le modèle du système asservi sera souvent donné sous forme de schéma bloc, ainsi il est primordial de savoir lire ce type de schéma.

Exemple : schématisation simplifiée du chariot de golf asservi en vitesse



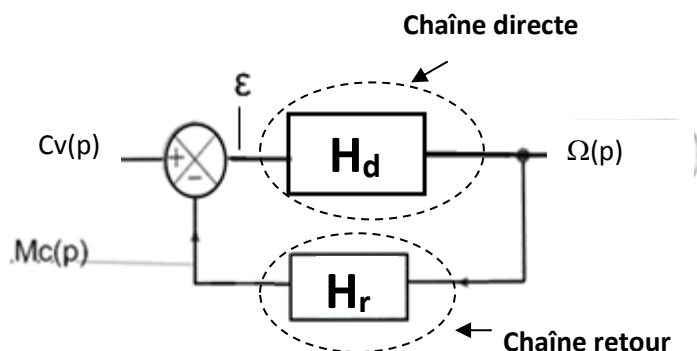
Avec :

$$H_m(p) = \frac{k}{(R+L.p).J.p+k^2} \quad ; \quad r=0,04 \quad ; \quad K_c=0,5 \text{ V.s} \quad ; \quad U_{bat}=12 \text{ V} \quad ; \quad R=0,4 \Omega$$

$$L=200 \mu\text{H} \quad ; \quad J=2 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \quad ; \quad k=0,028 \text{ V/rad.s}^{-1}$$

Rq : L'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée). On remarque bien qu'ici, on a un système en boucle fermée, par retour d'une mesure de vitesse Ω_c sur la consigne par l'intermédiaire du comparateur.

Lorsque plusieurs blocs sont imbriqués en ligne, on peut les remplacer par un seul bloc dont la fonction de transfert est le produit des autres fonctions de transfert. Par exemple, ici, on arrive au schéma suivant :



Avec $H_d = r \cdot H_m \cdot U_{bat} \cdot K$: fonction de transfert de la chaîne directe

Et $H_r = K_c$: fonction de transfert de la chaîne de retour

1. FTBO, FTBF

A partir d'un schéma bloc "simple", "classique" avec une unique boucle fermée, tel que celui vu page précédente, on définit deux fonctions de transfert "spécifiques" :

- La fonction de transfert en boucle ouverte, définie par la relation :

$$\mathbf{FTBO} = H_d(p) \cdot H_r(p) \left(= \frac{Mc(p)}{\varepsilon(p)} \right) \quad (\text{produit des fonctions de transfert})$$

- La fonction de transfert en boucle fermée, donnant la **relation entre sortie et entrée** :

$$\mathbf{FTBF} = \frac{\Omega(p)}{C_v(p)} = \frac{H_d(p)}{1+H_d(p) \cdot H_r(p)} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}}$$

Démonstration:

.....

.....

.....

La FTBF sera très utilisée car elle permet d'obtenir l'allure de la grandeur de sortie connaissant la consigne.

Exemple du chariot :

FTBO =

.....

FTBF =

.....

Afin d'obtenir des propriétés de l'asservissement en fonction de la fonction de transfert, on met

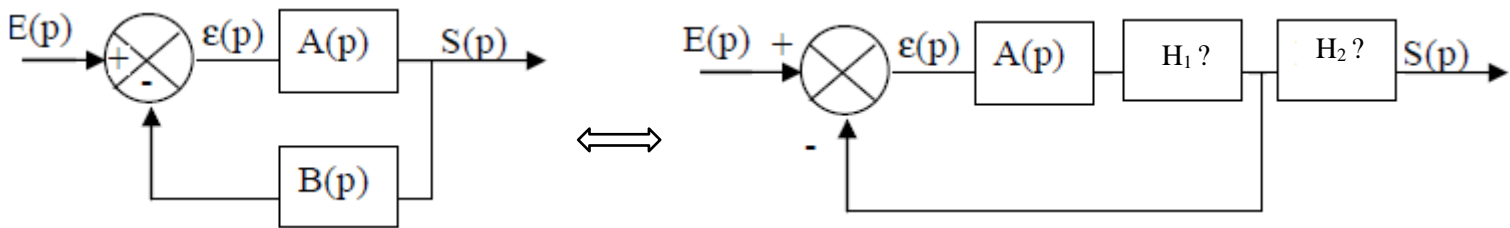
généralement la FTBF sous forme canonique (pour un 2nd ordre : $\frac{K}{1+\frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2}$)

.....

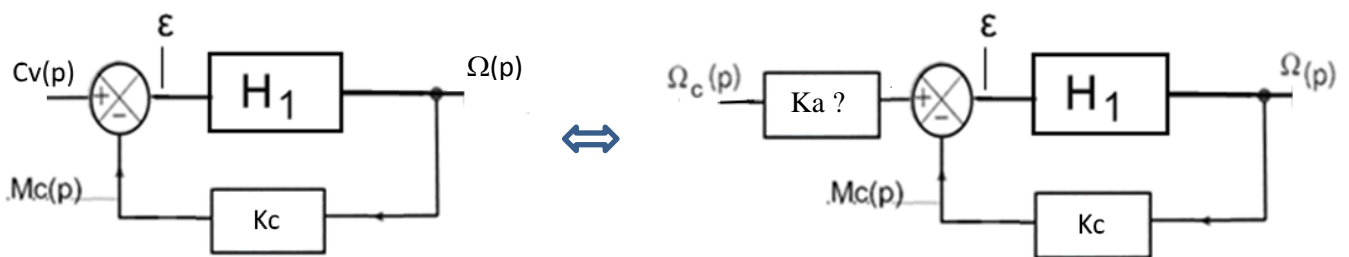
.....

.....

.....

Cas 2 : déplacement de bloc: (Exemple : mise sous retour unitaire)**Cas 3 : Homogénéisation de la consigne :**

Dans le cas du chariot de golf, la consigne n'est pas homogène à la grandeur de sortie, elle est homogène à la tension fournie par le capteur de vitesse ($M_c(p)$). Cela n'est pas commode pour définir une consigne claire du point de vue utilisateur. On peut alors rajouter un bloc avant C_v pour avoir une consigne de vitesse et non plus une consigne de tension

**III - REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES**

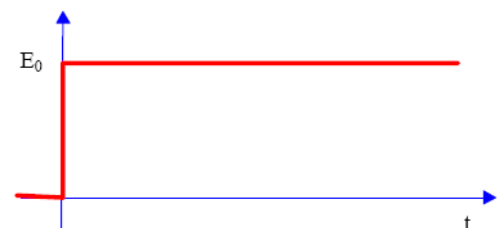
Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse des systèmes linéaires.

A. Signaux canoniques d'entrées

Afin d'analyser le comportement d'un système dynamique, on le soumet à des entrées typiques permettant l'étude de la sortie.

a) signal en échelon

La fonction échelon permet de soumettre le système à une entrée constante depuis $t=0$. Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires.



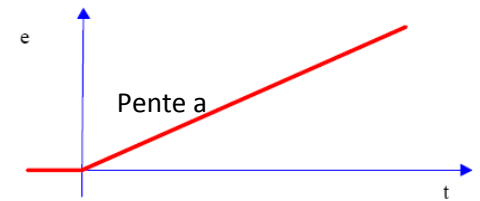
L'échelon a pour expression : $e(t)=E_0.u(t)$ avec $u(t)$ échelon de Heaviside (0 pour $t<0$ et 1 sinon)

La transformée de Laplace d'un tel signal est : $\frac{E_0}{p}$.

b) signal rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite. $e(t)=a.t.u(t)$

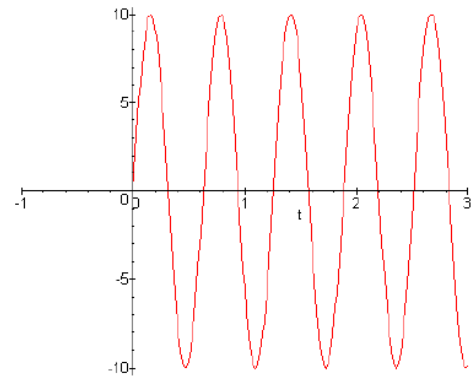
La transformée de Laplace d'une rampe est : $\frac{a}{p^2}$

**c) signal sinusoïdal**

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système. (Très utilisé notamment afin de caractériser les filtres en électronique)

$e(t)=K.\sin(\omega t).u(t)$

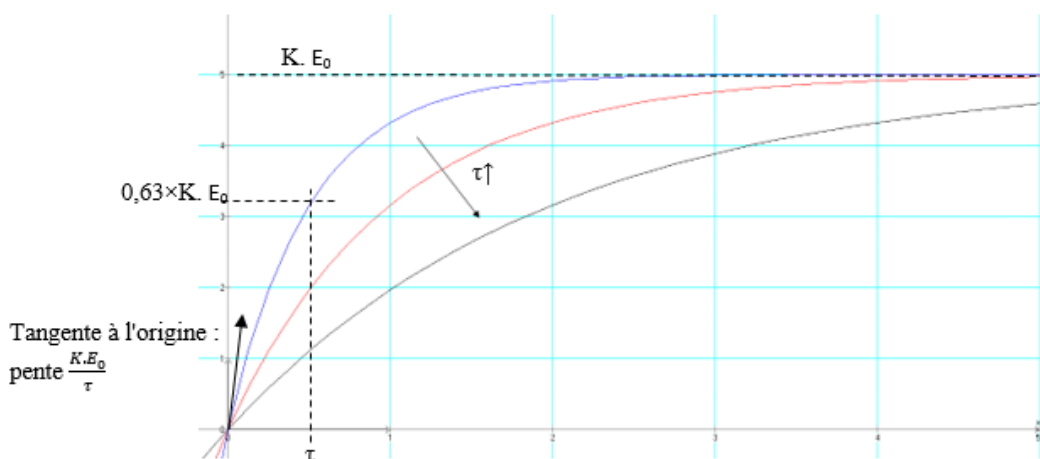
Rq : Pour ce type de signaux, on étudiera la fonction de transfert en remplaçant p par $j\omega$ (utilisation des complexes).

**B Réponse d'un système du premier ordre à un échelon (cf. chapitre précédent)**

Cette étude a en fait été faite lors du chapitre précédent. Voici les points importants à retenir :

Lorsque le SLCI a une fonction de transfert du premier ordre comme suit $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}$ et qu'il est soumis à un échelon d'amplitude E_0 :

- la sortie a une forme exponentielle de constante de temps τ
- la sortie atteint en régime permanent la valeur $S_\infty = K \times E_0$
- le temps de réponse est de 3τ

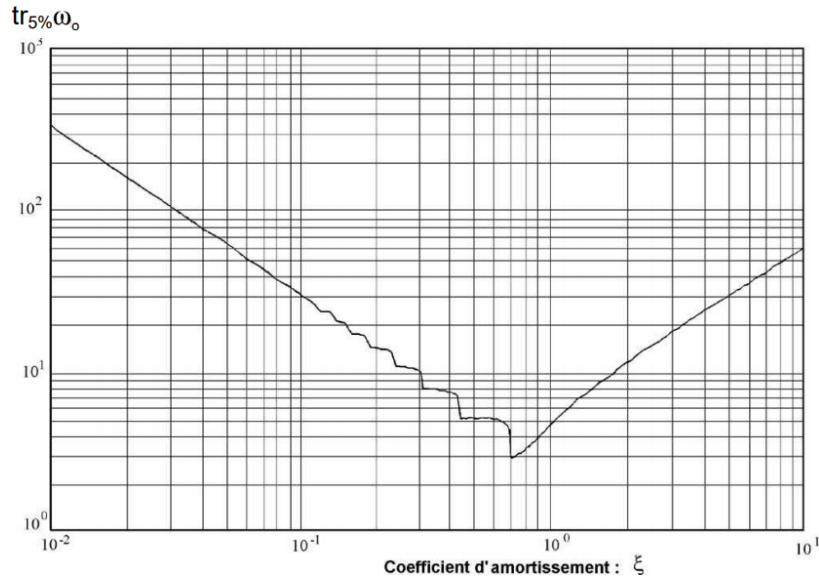
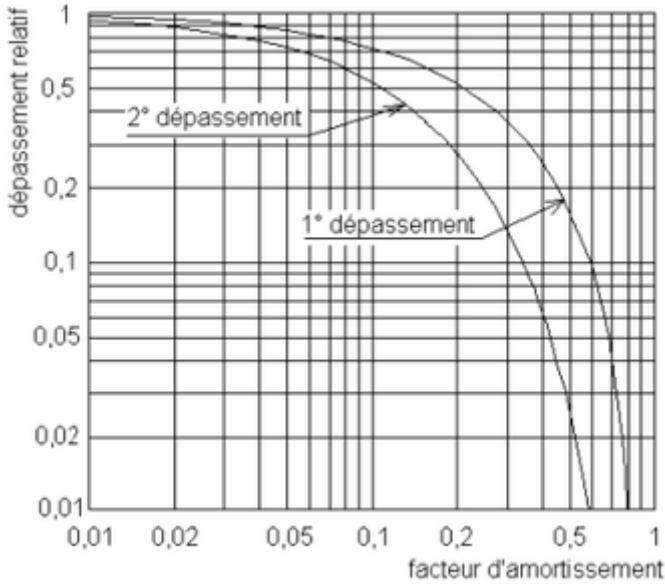
**C. Réponse d'un système du second ordre à un échelon (cf. chapitre précédent)**

Rappel des points importants concernant la réponse à un échelon d'un système ayant une fonction de transfert sous la forme :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2}$$

- Quel que soit la valeur de m , on retrouve la propriété : $S_{\infty} = K_{BF} \times E_0$ (sortie = gain statique × amplitude échelon)
- Si $m < 1$: réponse de forme pseudo périodique
 - + m est faible, + le dépassement est important (cf abaque gauche)
 - Temps de réponse réduit ($tr_{5\%} \times w_0$) minimal pour $m = 0,7$ (cf abaque droite)

Abaque des dépassements relatifs



- Si $m \geq 1$: réponse de forme quasi exponentielle (second ordre factorisable en 2 premiers ordres)

Ex : On donne la FTBF du chariot de golf dans le cas d'une consigne homogène en vitesse (cf page 4) :

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{\frac{8,57 \times K}{1 + 8,57 \times K}}{1 + \frac{1,02}{1 + 8,57 \times K} \cdot p + \frac{0,000512}{1 + 8,57 \times K} \cdot p^2}$$

Quelle valeur de consigne (échelon) doit –on donner pour que les roues tournent à une vitesse effective de 10 rad/s en régime permanent ? (pour $K=1$, sans correcteur). Conclusions ?

.....

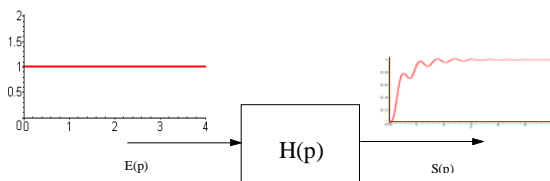
Que sera le temps de réponse à 5 % lors d'une consigne en échelon ($K=1$) ?

.....

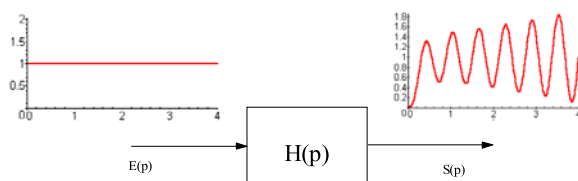
IV - STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

A. Définition

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse d'un système stable



Réponse d'un système instable

B. Condition de stabilité

Considérons un système quelconque dont on écrit la FTBF sous la forme :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

avec : p_i = pôles de $H(p)$ réels ou complexes et n = ordre de $H(p)$

Si on applique à l'entrée une impulsion de Dirac : $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$, la réponse temporelle $s(t)$ s'obtient en décomposant $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = H_{BF}(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \dots + \frac{N}{p - p_n} \Rightarrow s(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + \dots + Ne^{p_n t}$$

La sortie $s(t)$ est **bornée** si toutes les exponentielles sont décroissantes :

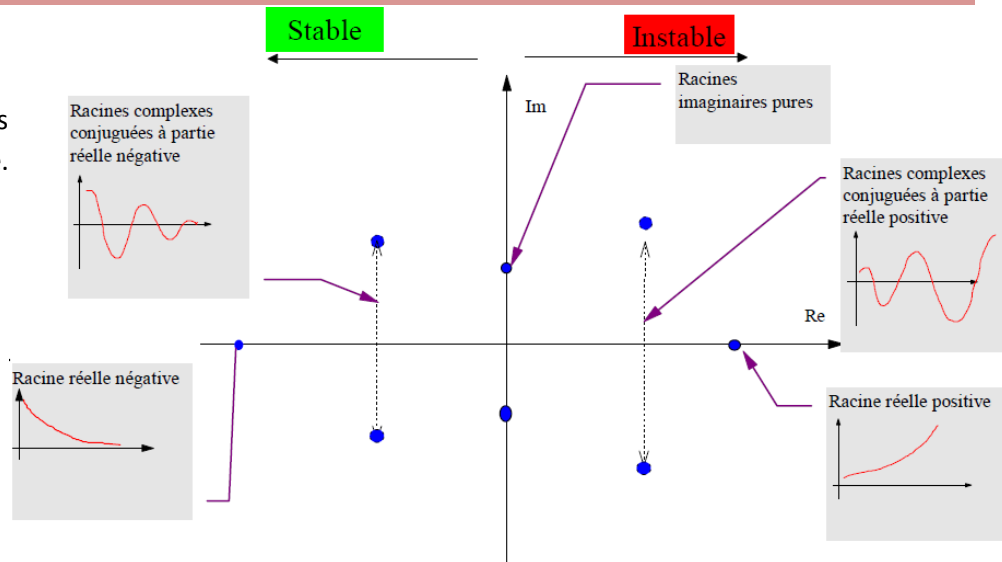
➤ Si les pôles sont tous réels : **$s(t)$ ne tend vers 0 que si les pôles p_i sont tous négatifs.**

➤ Si il y a des pôles complexes $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega \Rightarrow s(t) = Ae^{(\alpha+j\omega)t} + Be^{(\alpha-j\omega)t} = Ce^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Pôles complexes conjugués deux à deux : **$s(t)$ ne tend vers 0 que si $\alpha < 0$.**

Conclusion : Un système est stable si ses pôles ont une partie réelle négative ou nulle.

La position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne donc sur la stabilité de la fonction de transfert.

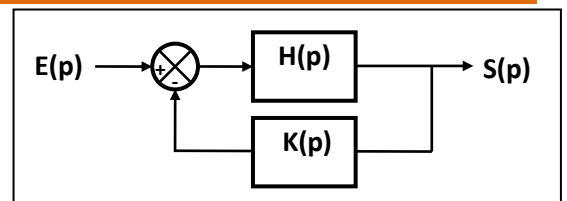


C. Etude de stabilité à partir de la FTBO

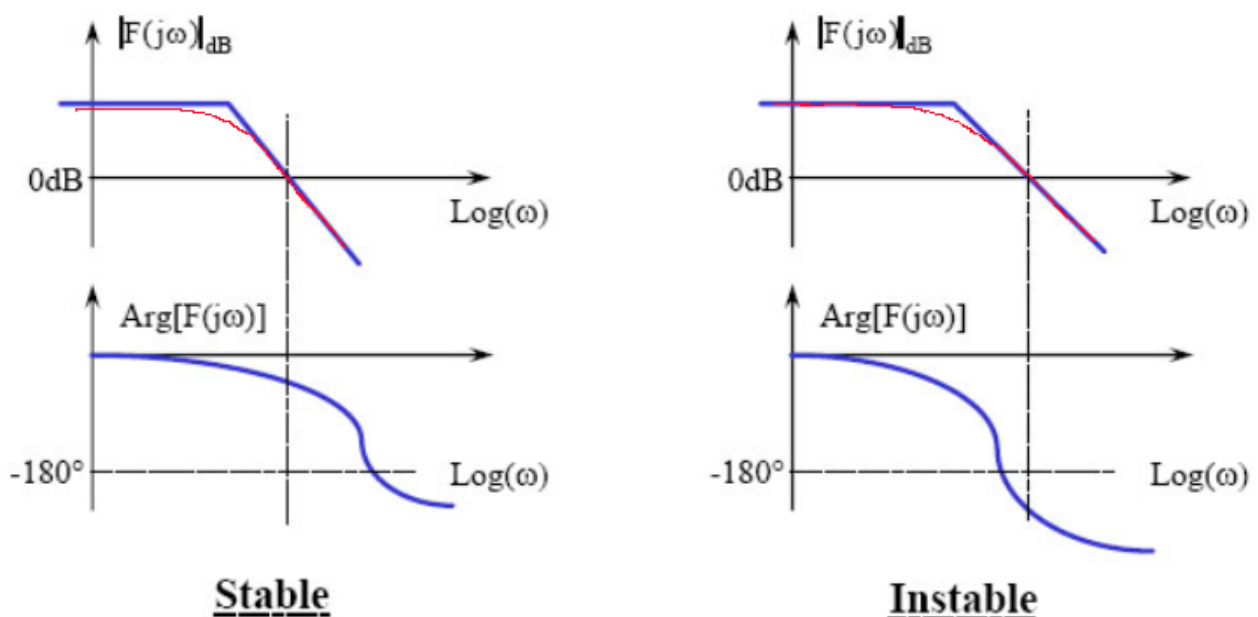
On a montré qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la FTBF ait des pôles à partie réelle négative. Ceci suppose de connaître l'expression du dénominateur de la FTBF et de savoir en calculer les racines. Or, si l'expression de la FTBF n'est pas toujours connue, on connaît généralement la FTBO par sa réponse harmonique (identification). On a donc développé des critères graphiques permettant d'étudier la stabilité de la FTBF à partir des lieux de transfert de la FTBO.

1. Notion de point critique

On pourrait montrer qu'un système est stable si, à la pulsation critique ω_c pour laquelle $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$ (donc $20 \cdot \log |H_{BO}(j\omega_c)| = 0$), le déphasage est supérieur à -180° .



On peut traduire ce critère graphiquement en utilisant les diagrammes de BODE. Les courbes suivantes montrent les digrammes correspondant à chaque cas de stabilité.



Rq : D'après ce critère, les systèmes du 1er ordre ou 2ème ordre sont toujours stables (au sens strict).

2. Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolu, ces critères ne permettent pas en général de régler un système, il faut pour cela définir des marges de stabilité, c'est à dire une distance à respecter entre le point critique (-1) et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte. On définit la marge de Gain et la marge de Phase.

On peut calculer les marges de phase et de gain à partir des diagrammes de Bode.

Marge de Phase (MP)

Pour la pulsation critique ω_c , pulsation pour laquelle $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$, (intersection de la courbe REELLE de gain avec les abscisses), on mesure la distance entre la courbe REELLE de phase et -180° .

Marge de Gain (MG)

On détermine la pulsation pour laquelle le déphasage est de -180° : ω_{-180} . La marge de gain est la distance (en dB) entre la courbe et l'axe des abscisses.

Les valeurs usuelles de marges de gain et de marge de phase permettant le réglage sont :

Marge de Gain : 10dB Marge de Phase : 45° ou 60°

Exemple : à partir du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du chariot de golf : donner la marge de phase du système sans correcteur ($K=1$).

FTBO : $\frac{8,57}{1+1,02 \times p + 0,000512 \times p^2}$ ce qui donne $\omega_0 = \dots$ et $m = \dots$

.....

$\frac{8,57}{1+1,02 \times p + 0,000512 \times p^2} = \dots$

On a donc par identification : $\tau_1 + \tau_2 = \dots$ et $\tau_1 \times \tau_2 = \dots$

Soit

Les solutions de cette équation sont : $\tau_1 = \dots$ et $\tau_2 = \dots$

la FTBO peut donc aussi s'écrire :

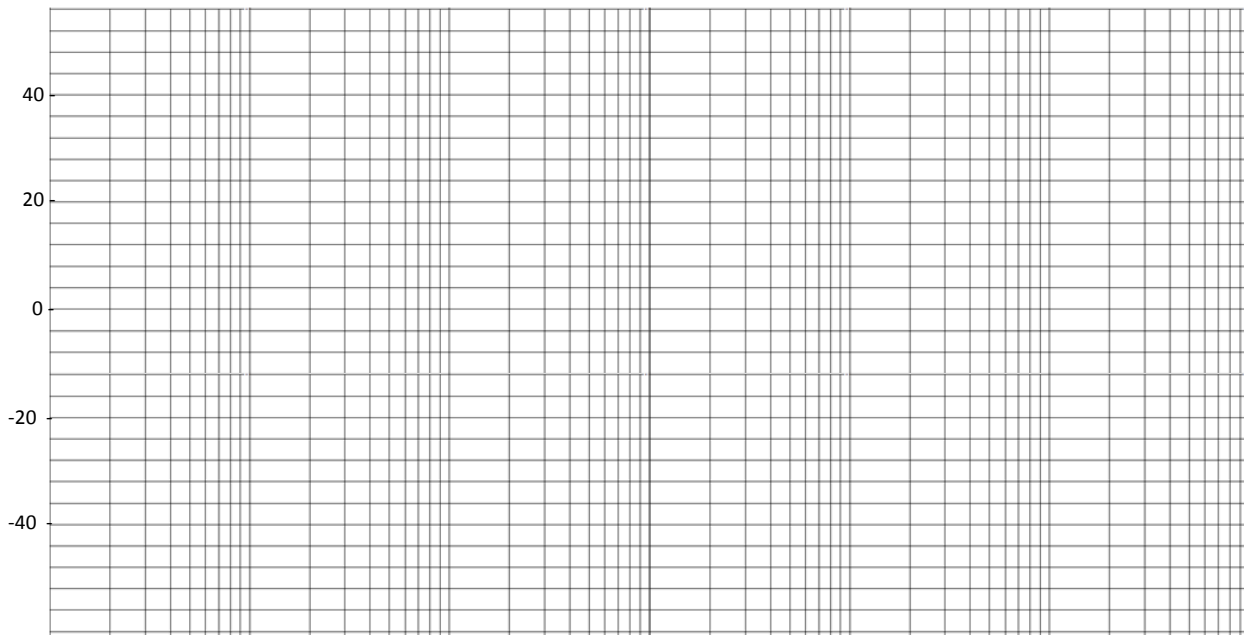
Les deux pulsations caractéristiques sont donc : $\omega_1 = \dots$ (correspondant à la constante de temps mécanique du moteur) et $\omega_2 = \dots$ (\leftrightarrow constante de temps électrique)

Tracé asymptotique :

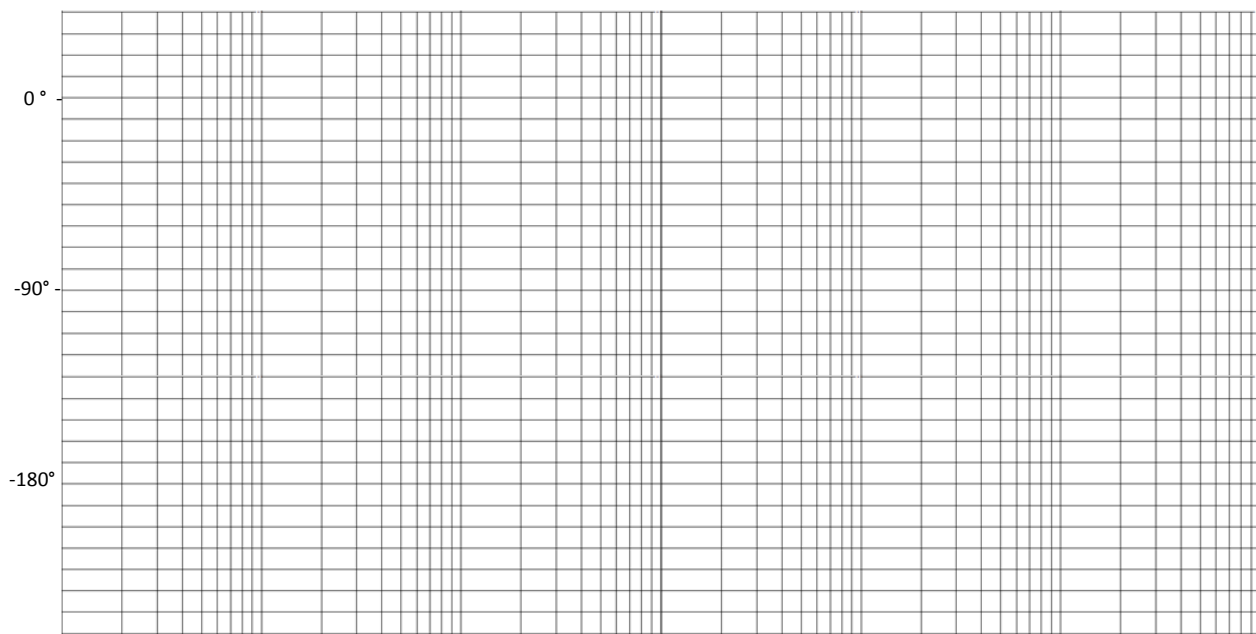
Pour $\omega \ll 1$, asymptote horizontale à $20 \log \dots$ pour le tracé d'amplitude et 0° pour la phase.

A ω_1 , le tracé d'amplitude passe d'une pente nulle à une pente de \dots dB/décade. La phase passe de 0 à \dots

A ω_2 , le tracé d'amplitude prend une pente de \dots dB/décade. La phase passe à \dots



Phase



Marge de phase :

-On trouve par le graphique la pulsation (que l'on notera w_c) pour laquelle s'annule $20 \log |H(jw)|$. On trouve $w_c = \dots\dots\dots$

- On calcule alors la phase exacte pour cette pulsation (le diagramme asymptotique n'est pas assez précis).

$$\text{Arg } H(jw_c) = \text{Arg} \frac{8,57}{(1+1,02.j.w_c)(1+0,000502.j.w_c)} = \dots\dots\dots$$

La marge de phase est donc $\dots\dots\dots$

Conclusion :

.....

Remarques :

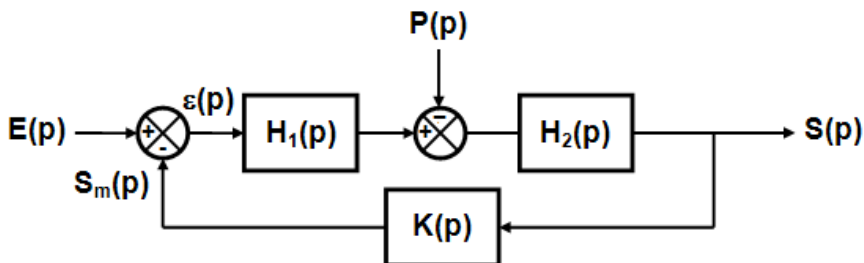
- La présence d'un intégrateur dans une chaîne d'action apporte un déphasage de -90° , ce qui rapproche le FTBO du point critique, et donc tend à déstabiliser le système.
- Tout retard est facteur d'instabilité. En effet, un retard T dans une évolution temporelle se traduit par une multiplication de la FTBO par un terme du type $e^{-T.p}$. Ce terme a un déphasage $\varphi = -T.\omega$ décroissant linéairement avec la pulsation ω . Son amplitude est constante et égale à 1 (0 dB).

L'incidence d'un traitement numérique sur la stabilité peut être prise en compte en ajoutant un retard pur T égal à la moitié de la période d'échantillonnage T_e à la FTBO.

VI - PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS

A. Définitions

On considère le système asservi décrit par le schéma bloc suivant. Son rôle est de faire suivre à la sortie $\mathbf{s(t)}$ une loi déterminée en général par la consigne $\mathbf{e(t)}$. Afin d'évaluer la précision du système, on définit l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon(t)}$ à un instant donné comme la différence entre la consigne $\mathbf{e(t)}$ et la mesure $\mathbf{S_m(t)}$. La précision sera d'autant meilleure que $\boldsymbol{\varepsilon(t)}$ tendra vers $\mathbf{0}$.



Son étude se fait en utilisant les transformées de LAPLACE. L'erreur $\boldsymbol{\varepsilon(p)}$ résulte de la somme de :

$\boldsymbol{\varepsilon_E(p)}$: erreur due à la consigne $\mathbf{E(p)}$ seule \Rightarrow problème de **poursuite** (asservissement)

$\boldsymbol{\varepsilon_P(p)}$: erreur due à la perturbation $\mathbf{P(p)}$ seule \Rightarrow problème de **régulation**.

On détermine l'expression de $\boldsymbol{\varepsilon(p)}$ en appliquant le théorème de superposition : $\boldsymbol{\varepsilon(p)} = \boldsymbol{\varepsilon_E(p)} + \boldsymbol{\varepsilon_P(p)}$.

B. Système non perturbé

On considérera ici dans un premier temps que la perturbation est nulle $P(p)=0$.

Dans ce cas, on peut exprimer l'erreur en fonction de la consigne :

$\boldsymbol{\varepsilon(p)} =$

.....

.....

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \dots\dots\dots$$

Si l'on écrit la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme :

$$H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot K(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)} \quad \text{avec } N(0)=1 \text{ et } D(0)=1, K : \text{ gain statique et } \alpha : \text{ classe du système}$$

On obtient l'expression suivante :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}} = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)}$$

1. Erreur statique

L'erreur statique ($\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$) s'obtient grâce au théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Nous allons voir quel est l'erreur statique lors de différents signaux d'entrée.

2. Erreur indicielle

L'entrée considérée ici est un échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$. L'erreur statique est donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times E_0$$

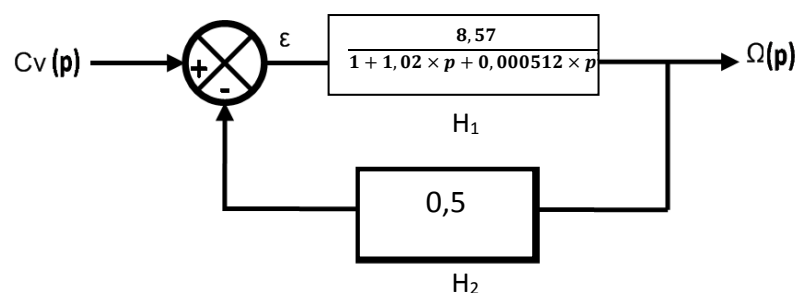
On constate donc que :

- Pour $\alpha = 0$, l'erreur vaut : $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{D(p)}{D(p) + K \cdot N(p)} \times E_0 = \frac{E_0}{1 + K}$

Donc, plus le gain statique est important, plus l'erreur sera faible.

- pour $\alpha \geq 1$, l'erreur indicielle est nulle. La présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert entraîne une erreur indicielle nulle.

Exemple : Calcul de l'erreur indicielle relative pour le chariot de golf (sans correcteur), lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude 2 V.



3. Erreur de traînage

L'entrée considérée ici est une rampe : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$. L'erreur statique est donc :

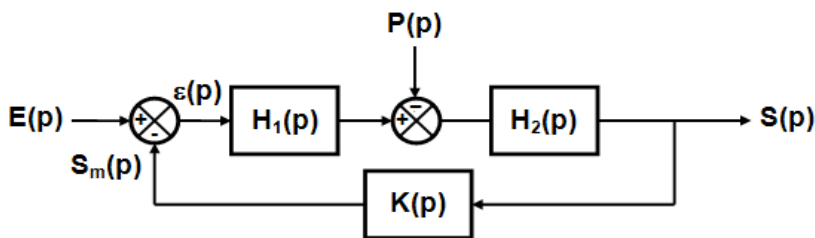
$$\lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times \frac{E_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha+K}} \times E_0$$

- Pour $\alpha = 0$, la limite tend vers l'infini. La sortie n'arrive pas à suivre la consigne.

- Pour $\alpha = 1$, $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^{1+K}} \times E_0 = \frac{E_0}{K}$, l'erreur est donc constante et vaut $\frac{E_0}{K}$.

- Pour $\alpha \geq 2$, $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha+K}} \times E_0 = 0$, l'erreur est alors nulle.

C. Effet de la perturbation



On reprend le diagramme de départ, et cette fois, nous allons étudier l'erreur provoquée par la perturbation. Afin de n'étudier que l'effet de la perturbation, on considèrera dans nos calculs $E(p)=0$.

L'erreur due à la perturbation est calculée par la formule :

$$\varepsilon(p) = -S_m(p) = -K(p) \cdot H_2(p) \cdot [-P(p) + H_1(p) \cdot \varepsilon(p)]$$

$$\varepsilon(p) \cdot [1 + K(p) \cdot H_2(p) \cdot H_1(p)] = K(p) \cdot H_2(p) \cdot P(p)$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{P(p)} = \frac{K(p) \cdot H_2(p)}{1 + K(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)}$$

On va alors décomposer H_1 et H_2 de la façon suivante : $H_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}$ et $K(p) \cdot H_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$

$$\text{On a alors : } \frac{\varepsilon(p)}{P(p)} = \frac{\frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}}{1 + \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \times \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}} = \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)}$$

a) Erreur indicielle

Lorsque la perturbation est un échelon $P(p) = \frac{P_0}{p}$, l'erreur due à celle-ci est donc :

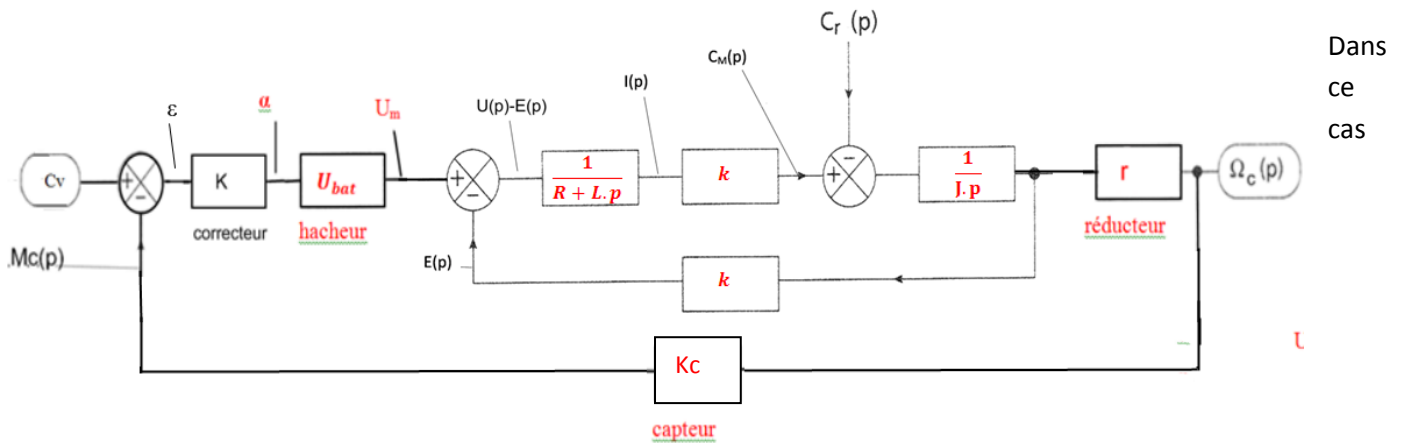
$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \times P_0$$

On constate que quel que soit le nombre d'intégrations dans H_2 , H_2 ne permettra pas d'annuler l'erreur.

- Par contre, si $\alpha_1 \geq 1$, $\varepsilon_p = 0$. La présence d'une intégration **avant la perturbation** permet d'annuler l'erreur indicielle.

Exemple du chariot de golf :

En fait, en tenant compte du couple de charge, la modélisation du chariot de golf est :



l'erreur due à la perturbation est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\varepsilon(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{\frac{J.p}{K.c.r} + \frac{k}{R+L.p} (K.U_{bat} - \frac{k}{K.c.r})} \quad \text{AN: } \frac{\varepsilon(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{0,3 \times p + \frac{0,3}{0,4 + 0,0002.p}}$$

Sans correcteur, l'erreur indicielle due à la perturbation (couple résistant au niveau moteur, constant de 0,3 N.m) est donc :

.....

b) Erreur de trainage

L'étude se fait de la même manière que pour l'erreur due à la consigne. On montrerait ainsi que l'erreur est nulle pour $\alpha_1 \geq 2$.

Le calcul de la limite suivante $\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2.N_2(p).p^{\alpha_1-1}.D_1(p)}{p^{\alpha_1}.D_1(p).p^{\alpha_2}.D_2(p)+K_1.N_1(p).K_2.N_2(p)} \times P_0$ permet de calculer les valeurs de l'erreur pour les autres cas.

D. Conclusion

Dans tous les cas de figure, on voit qu'il faut des intégrateurs dans la boucle pour annuler l'erreur $\varepsilon(t)$. Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on a dit qu'il fallait les apporter avec un correcteur. Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter -90° quelle que soit la valeur de ω . On peut se douter que perdre 90° aura forcément un effet négatif sur la marge de phase $M\phi$ (qui pourra même devenir négative) et donc sur la stabilité.

L'autre moyen d'améliorer la précision est d'augmenter le gain de la boucle ouverte. Le dilemme est alors le même, une augmentation de K diminuant également la marge de stabilité

Il faudra donc faire un compromis entre la stabilité (ou plutôt les marges de stabilité) et la précision.

Annexe 1**3. Tableau des transformées de Laplace usuelles**

$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$	$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
K	$\frac{K}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$
$K.t$	$\frac{K}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + p^2}$
$e^{-a.t}$	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a.t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + (p+a)^2}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \tau.p)}$	$sh \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-a.t} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$ch \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

Annexe 2**Transformation de Laplace inverse**

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée.

Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme de fractions rationnelles en p , la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples, La fonction temporelle consiste alors en la recherche dans la table précédente de la transformée inverse de chaque fraction élémentaire. La fonction temporelle correspondante est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

a) **exemple:**

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 15p + 50} = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)}$$

Décomposition en éléments simples

On met $F(p)$ sous la forme $\frac{A_1}{(p+5)} + \frac{A_2}{(p+10)}$.

On résout en identifiant

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)} = \frac{A_1(p+10) + A_2(p+5)}{(p+5)(p+10)} \quad \text{on a donc}$$

$$F(p) = \frac{A_1 p + 10 A_1 + A_2 p + 5 A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$F(p) = \frac{(A_1 + A_2)p + 10 A_1 + 5 A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$A_1 = -\frac{3}{5}; A_2 = \frac{8}{5}$$

$$F(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{(p+5)} + \frac{\frac{8}{5}}{(p+10)}$$

puis en recherchant dans la table:

$$f(t) = -\frac{3}{5} e^{-5t} + \frac{8}{5} e^{-10t}$$

Exemple 2 :

Circuit RC (exemple du cours)

$$U_s(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{U_0}{p}$$

Décomposition en éléments simples

$$U_s(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{U_0}{p} = U_0 \left(\frac{A}{1 + \tau \cdot p} + \frac{B}{p} \right) \Rightarrow U_s(p) = U_0 \left(\frac{A \cdot p + B \cdot (1 + \tau \cdot p)}{(1 + \tau \cdot p)p} \right)$$

On déduit donc $B = 1$ $A = -\tau$

la décomposition s'écrit $U_s(p) = U_0 \left(\frac{-\tau}{1 + \tau \cdot p} + \frac{1}{p} \right)$

Transformation inverse

On reconnaît deux formes particulières dans le tableau des transformées (Cf annexe Transformation de Laplace).

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
K	$\frac{K}{p}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{p + a}$

d'où la solution complète

$$u_s(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Annexe 3

Diagramme de BODE du chariot de golf :