MODELISATION D'UN SYSTEME LINEAIRE CONTINU INVARIANT

Se doter d'un modèle théorique d'un système complexe est un préalable nécessaire qui permettra :

- de prévoir son comportement et notamment de valider ou non ses performances
- d'élaborer les lois de commande (correcteur) qui permettront d'obtenir les performances souhaitées

Dans ce chapitre, nous définirons le cadre d'étude des systèmes en ATS. Puis nous verrons quelles sont les méthodes permettant d'obtenir ce modèle (méthodes théorique et expérimentales)

I - SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

Cette année, l’étude d’asservissement de systèmes se fera uniquement dans le cadre de systèmes linéaires continus et invariants (SLCI), ce qui exclue les systèmes numériques. Dans ce chapitre, nous allons définir ce que cela signifie.

A. Définitions

1. Système linéaire

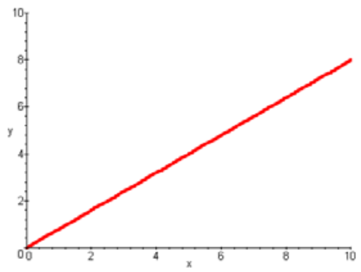
Un système linéaire est un système où les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la **proportionnalité** et **l’additivité**.

Principe de proportionnalité

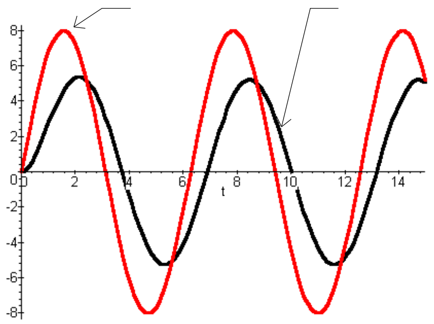
L’effet est proportionnel à la cause : si **y** est la réponse à l'entrée **x**, alors λ**y** est la réponse à λ.**x**.

Remarque: L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée/Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente $\frac{Y}{X}$ est appelée gain du système.



La réponse, en régime définitif, d’un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée



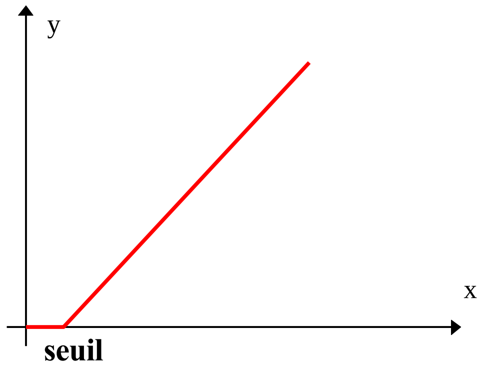
Principe d'additivité ou de superposition :

Si **y1** est la réponse à **x1**, si **y2** est la réponse à **x2**, alors la réponse à **x1+x2** est **y=y1+y2**.

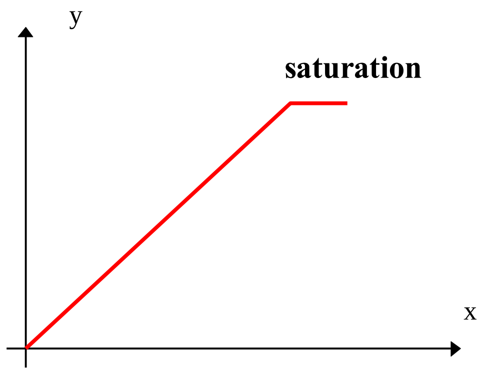
Le principe de superposition va permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par **additivité** et **proportionnalité** la réponse à des sollicitations plus complexes.

Principales non - linéarités

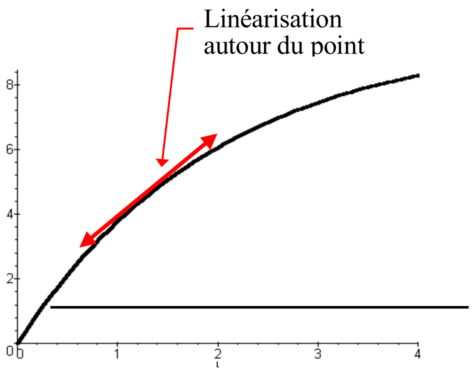
Seuil
Un système présente un seuil lorsque la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse un seuil mini. Un grand nombre de système présente un seuil de fonctionnement. Ex, en méca, ces seuils ont souvent pour origine des frottements secs.



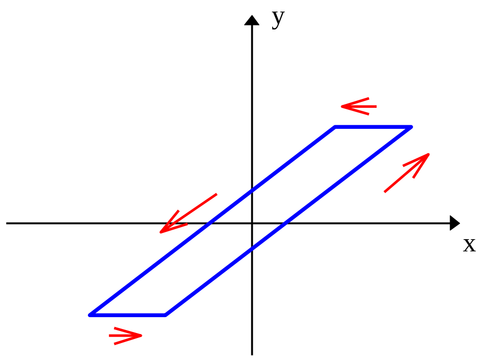
Saturation
Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.
Exemple : limites des interfaces de puissance (saturation des ampli-Op).



Courbure
La quasi-totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcé.
Dans la plupart des cas, le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de **linéariser** autour d'un point de fonctionnement.



Hystérésis
Un système présente une réponse en hystérésis lorsque le comportement en « montée » est différent de celui en « descente ».
par exemple: cycle de magnétisation.



2. Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions continus du type f(t) avec t une variable continue (en général le temps).On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets, par exemple les systèmes informatiques.

3. Système invariant

On dit qu'un système est invariant lorsque ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps.

B. Représentation des systèmes linéaires

Pour réaliser une commande automatique, il est nécessaire d'établir les relations existant entre les entrées (variables de commande) et les sorties (variables d'observation). L'ensemble de ces relations s'appelle "modèle mathématiques" du système.

1. Schéma physique

Le schéma peut correspondre à une première étape, facilitant par la suite l'écriture de relations entre les grandeurs d'entrées et de sortie.
Ce type de schéma utilise la normalisation de chaque technologie

Schéma électrique - MCC

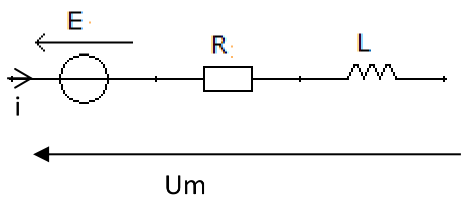
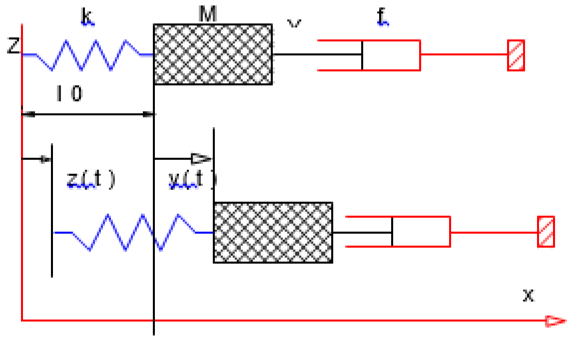
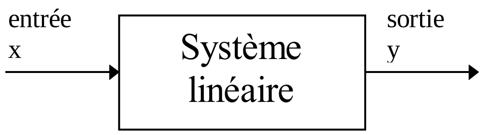


Schéma mécanique - Masse Ressort amortisseur



2. Représentation par les équations différentielles.

Un système dynamique linéaire peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.



L'équation générale d'un système linéaire est de la forme

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_2 \frac{dy^2}{dt^2} + b_1 \frac{dy^1}{dt^1} + b_0 \cdot y = a_n \frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{dx^2}{dt^2} + a_1 \frac{dx^1}{dt^1} + a_0 \cdot x$$

Rq: dans le cas des systèmes réels $m \geq n$.

Le problème de l'utilisation direct d'équation différentielles pour la conception de systèmes asservis est que nous ne savons résoudre dans le cas général que les équations différentielles du premier et du second ordre et dans quelques cas particuliers des équations d'ordre supérieur.

De plus, le problème de l'automatisation est plus complexe que la résolution puisqu'il s'agit de déterminer la loi d'entrée x qui permet d'obtenir la sortie désirée y.

Les équations différentielles serviront de base afin d'obtenir un modèle de notre système dans un nouveau formalisme : la transformée de Laplace (dans lesquels les calculs sont plus simple à réaliser).

3. Représentation par la transformée de Laplace

La transformation de Laplace permet de passer du domaine temporelle (variable le temps t) au domaine symbolique (variable : opérateur de Laplace p) est définie de la manière suivante :
$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.f(t).dt$

Les principales propriétés de la transformation de Laplace sont résumées dans le tableau suivant :

opération	Temporelle	Laplace
addition	f(t)+g(t)	F(p)+G(p)
linéarité	a.f(t)	a.F(p)
Dérivation	$\frac{d\,f(t)}{dt}$	p.F(p)-f(0+) Si f(0+) =0 (condition de Heaviside) l'opération de dérivation correspond à une multiplication par p : $L(\frac{d\,f(t)}{dt}) = p.F(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$ avec g primitive de f Si g(0+)=0, l'intégration (ou primitive) revient à diviser par p : $L(\int_0^t f(t)dt) = \frac{F(p)}{p}$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot F(p)$	

L'utilisation de la transformée de Laplace permet de ramener la résolution d'une équation différentielle a une manipulation algébrique.

En annexe 1, on donne les transformés de Laplace des fonctions usuelles.

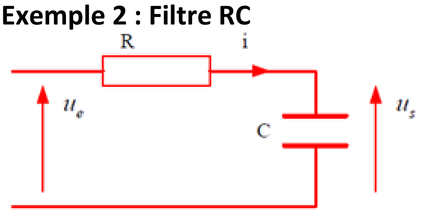
Exemple 1 : équations du MCC en Laplace
L'équation électrique du moteur est obtenue à partir du schéma électrique vu précédemment :

$u_m(t)$ = ...

Passons dans le domaine symbolique : $u_m(t) \to U_m(p)$, $E(t) \to E(p)$, $i(t) \to I(p)$

Nous supposons les conditions initiales, nulles (conditions de Heaviside). L'équation temporelle devient, dans le domaine de Laplace :
. . . .

Exemple 2 : Filtre RC



Équations temporelles :
$u_e(t) - R.i(t) - u_s(t) = =0$

$i = C \times \frac{d\,Us}{dt}$

En Laplace, on obtient :
. . . .

On prend pour l'entrée $U_e(t)=U_0$, donc dans le domaine symbolique $U_e(p)=\frac{U_0}{p}$.
$Us(p) = \frac{1}{1+RCp} \times \frac{U_0}{p}$

<u>Rq :</u> A partir de l'expression de Laplace de Us(p), on peut retrouver l'expression de Us(t) (cf. annexe 2).

On trouve alors :

Us(t)= . . . . (Solution que l'on aurait retrouvée en résolvant l'équation différentielle du 1er ordre)

4. Représentation par le schéma fonctionnel - Fonction de transfert

Afin de modéliser un système complexe, nous allons utiliser une représentation graphique sous forme de blocs. Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions/composants du système.

Dans chaque bloc, sera inscrite la relation entre entrée et sortie du composant : sa fonction de transfert.

a) ***Fonction de transfert***

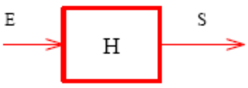
La fonction de transfert d'un composant ou d'un système est le rapport : grandeur de sortie sur grandeur d'entrée exprimées en Laplace

H(p) = $\frac{S(p)}{E(p)}$ S : grandeur de sortie E : grandeur d'entrée

Nous verrons dans le chapitre suivant les différentes méthodes permettant d'obtenir ces fonctions de transferts.

b) ***Schéma fonctionnel (schéma bloc)***

Un schéma bloc peut permettre de représenter un système isolé simple.



Ce schéma se lit alors : S(p)=H(p).E(p)

On peut également imbriquer plusieurs blocs afin de représenter un système plus complexe. Chaque composant du système est représenté par un bloc. Les liens ("fils") entre les blocs portent les variables intermédiaires globales du système.

Exemple : schématisation simplifié du chariot de golf avec régulation de vitesse :

- Placement de la grandeur de sortie (tout à droite), de la consigne ou entrée (tout à gauche)
- Si système asservi : dessin de la chaîne de retour (bloc correspondant au capteur), puis du comparateur
- Implantation des blocs des constituants du système en respectant l'ordre logique des grandeurs physiques.

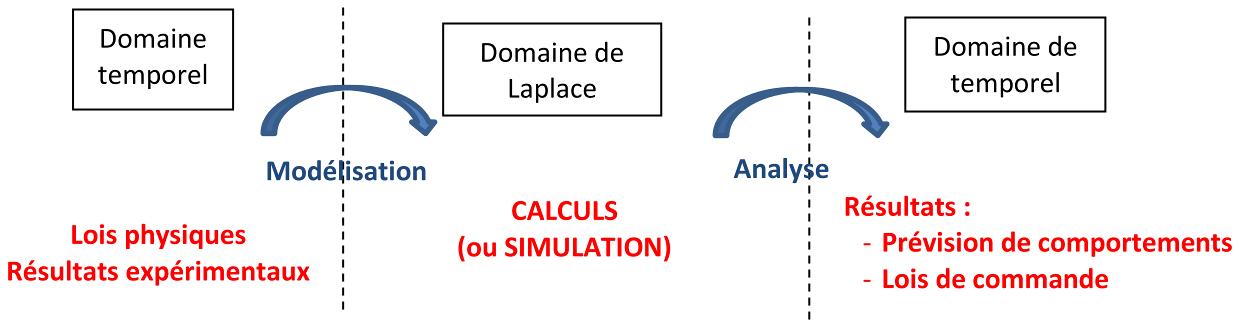
Remarque importante :

- Dans les blocs se trouvent les fonctions de transfert.
- Sur les "fils", les variables sont souvent des grandeurs physiques.

L'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée). On remarque bien qu'ici, on a un système en boucle fermée, par retour de Ω_c sur la consigne par l'intermédiaire du comparateur.

Méthodologie d'étude des SLCI

Une fois le modèle établi en Laplace, on procédera à son analyse (par calcul ou simulation) afin de prévoir le comportement du système et/ ou de calculer les paramètres du correcteur qui permettront de respecter le cahier des charges de l'asservissement. (cf. chapitres suivants)



III – "Methode theorique " d'obtention du modele

Lorsque la loi de comportement du système/composant est connue (par sa relation entrée/ sortie directement ou par une équation différentielle), il suffit de transformer cette équation différentielle dans le domaine de Laplace. Puis de faire apparaitre le rapport grandeur de sortie / grandeur d'entrée.

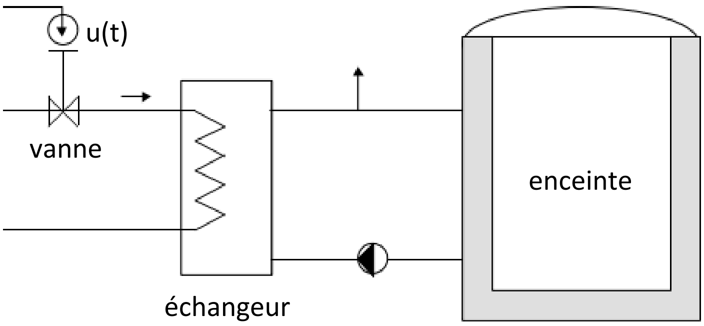
Exemple 1 : **réducteur à engrenages à axes //**

Un réducteur basique constitué d'un engrenage à Z_1 dents (pignon C) et un autre à Z_2 dents (roue S) permettant de réduire la vitesse angulaire d'entrée w_C du pignon. La relation entre la vitesse du pignon et de la roue est : $\frac{w_S}{w_C} = -\frac{Z_C}{Z_S}$

La fonction de transfert du réducteur est donc : H(p)= $\frac{w_S\,(p)}{w_C\,(p)} = -\frac{Z_C}{Z_S}$

Vocabulaire : On voit qu'ici, la fonction de transfert est un simple coefficient multiplicateur (pas de variable p), on parlera de gain pur.

Exemple 2 : **Régulation de température d'une enceinte par échangeur**



Description du système :
La tension u(t) commande le débit de sortie q(t) d'une vanne de l'échangeur. On note θ_1 la température en sortie de l'échangeur.

On souhaite réguler la température θ au sein de l'enceinte.

Le système est régi par les lois suivantes : $\frac{d\,q(t)}{dt} = k_0 \times u(t)$ (1)

$\theta_1(t) + \tau_1 \times \frac{d\,\theta_1(t)}{dt} = k_1 \times q(t)$ (2) $\theta(t) + \tau_2 \times \frac{d\,\theta(t)}{dt} = k_2 \times \theta_1(t)$ (3)

Modélisation du système à asservir :

Rq : Si les paramètres de comportement du système ne sont pas connus, on peut être amené à effectuer des mesures pour les déterminer.

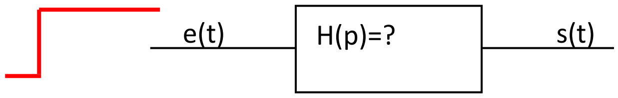
Rq : Modification, composants à apporter afin d'asservir le système :

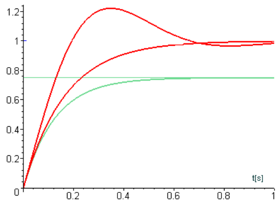
IV. Methodes experimentales

Lorsqu'on dispose du système à étudier, il peut être plus rapide d'effectuer des essais permettant d'élaborer un modèle. On étudiera 2 types de protocoles.

A. Identification par essai indiciel

Cette méthode consiste à imposer en entrée une sollicitation en échelon (signal nul pour t<0, puis constant). On relève alors l'évolution du signal de sortie. La forme de la sortie nous donnera la fonction de transfert du système.





Cette méthode nécessite de savoir comment répondent les systèmes lorsqu'on leur applique en entrée un signal constant. C'est ce qui va être indiqué dans les paragraphes suivants (cela servira également au prochain chapitre)

1) Système d'ordre 1:

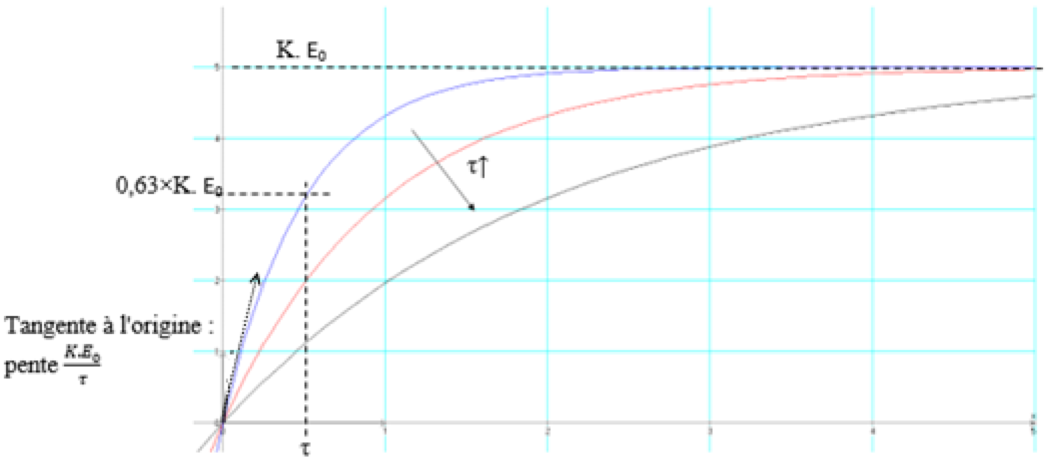
On appelle système du premier ordre, tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre. Un système du 1^er^ ordre a une fonction de transfert avec un polynôme du 1^er^ degré au dénominateur.

$s(t) + \tau . \frac{d\,s(t)}{dt} = K.e(t) \quad \leftrightarrow \quad S(p).(1+\tau.p) = K.E(p) \quad \leftrightarrow \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}$

a) Propriétés de la réponse indicielle :

Lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude Eo, on obtient une sortie de forme exponentielle

$s(t)=K.E_0.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

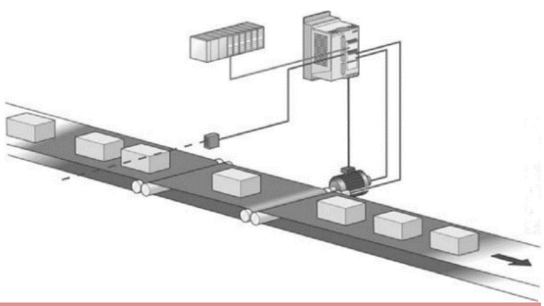


Rq : Un autre point important de la réponse exponentielle est le point d'abscisse 3τ. On alors : $s(3\tau)=0{,}95\times s_{final}$. Le temps de réponse à 5% d'un système du premier ordre est donc $tr_{5\%}=3\,\tau$.

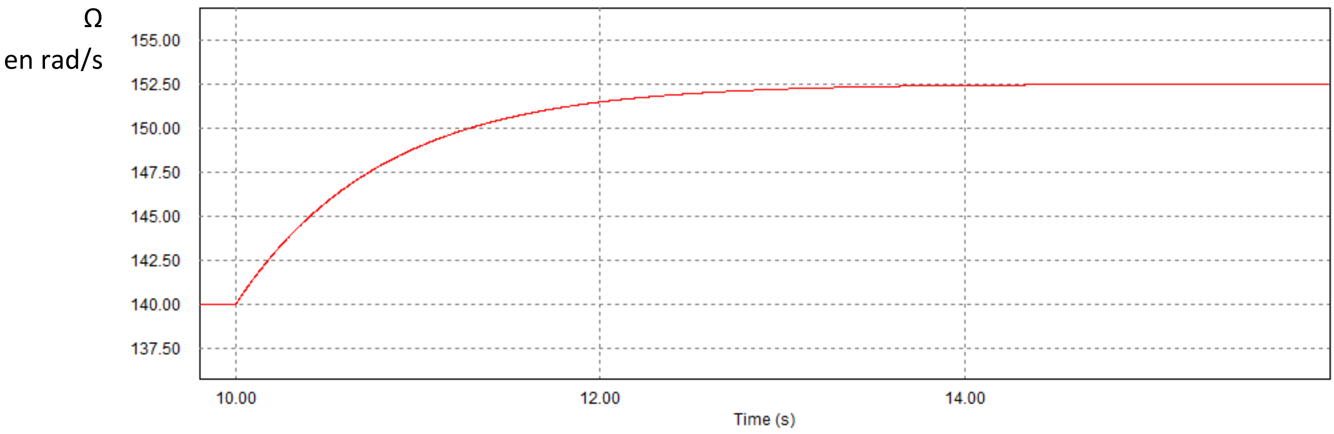
Méthode d'identification:

Afin d'élaborer le contrôle d'un convoyeur asservi en vitesse, on souhaite connaître la fonction de transfert de l'enrouleuse

Uc → [H(p)=?] → Ω



On a donc appliqué un échelon de tension Uc de 20 V sur le moteur à courant continu et on a relevé la vitesse Ω en sortie de moteur :



2) Système du deuxième ordre

On appelle système du deuxième ordre, tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du deuxième ordre. Un système du 2ème ordre a une fonction de transfert avec un polynôme du second degré au dénominateur.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\frac{2m}{w_0}\times p+\frac{1}{{w_0}^2}\times p^2} \quad \leftrightarrow \quad s(t)+\frac{2m}{w_0}.\frac{d\,s(t)}{dt}+\frac{1}{{w_0}^2}\times\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = K.e(t)$$

a) Propriétés de la réponse indicielle :

On retrouve différent type de réponse suivant la valeur de m (coefficient d'amortissement).

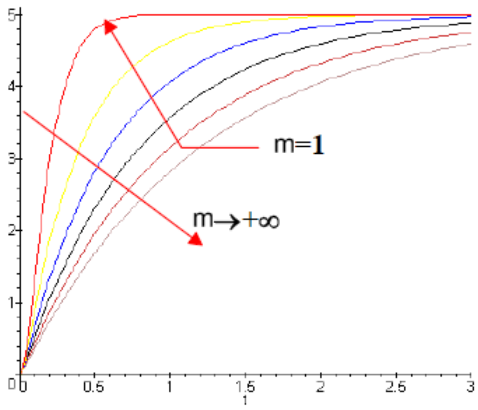
- ***m > 1***

On a alors un régime amorti, régime apériodique. Dans ce cas, la fonction de transfert peut être écrite comme le produit de deux 'premier ordre'.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\frac{2m}{w_0}\times p+\frac{1}{{w_0}^2}\times p^2} = \frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}$$

La réponse est alors : $s(t) = \frac{KE_0}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)-\tau_2\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)$

Les courbes de réponse ressemblent à un premier ordre. Une des différences vient de la pente à l'origine est ici nulle.



Rq : lorsque la différence entre les 2 constantes de temps τ_1 et τ_2 est importante, on peut négliger le terme avec la constante de temps la plus faible. On ne conserve que le pôle dominant.(constante de temps la plus grande). Ainsi, lors de la modélisation des moteurs, on néglige souvent la constante de temps électrique.

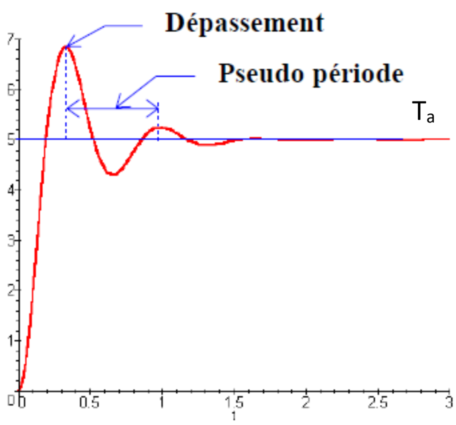
- ***m = 1***

On est alors en régime apériodique critique :

$$s(t) = KE_0\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

La réponse sera également proche d'un premier ordre.

- **m < 1**



On est ici en régime pseudo periodique. La réponse à un échelon va avoir l'allure suivante :

Son expression est :

$$s(t) = KE_0\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}.\left(\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t-\varphi\right)\right)\right]$$

Avec $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-m^2}}{-m}$

- **pseudo-pulsation**

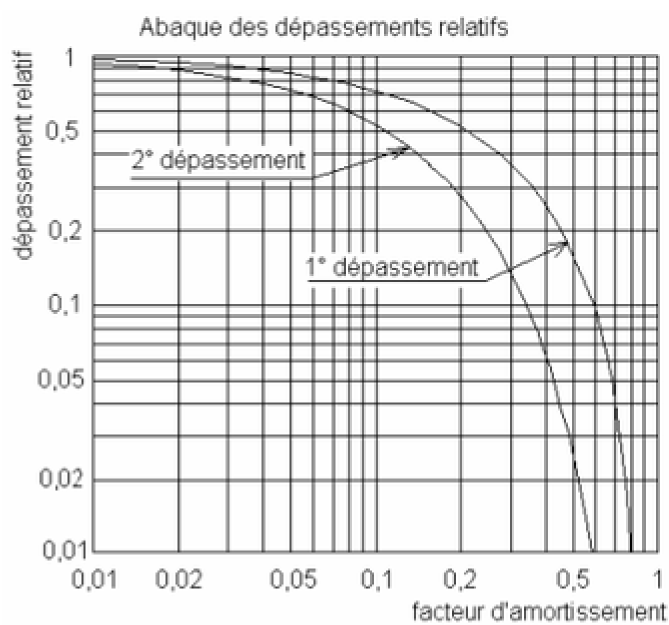
La pseudo-pulsation de la réponse est donnée par la relation suivante : $w_a = w_0.\sqrt{1-m^2} = \frac{2\pi}{T_a}$

- **Dépassement**

Un calcul donnerait un premier dépassement défini par :

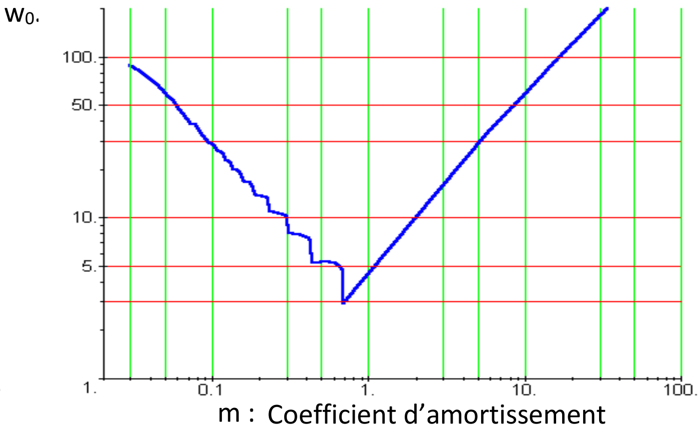
d= $\frac{S_{max}-S_{final}}{S_{final}} = e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$

Rq :
- Plus m est faible, plus le dépassement est fort.
- Plutôt que la formule précédente, on utilise l'abaque ci contre pour avoir la relation entre m et d.



- **Temps de réponse à 5%**

L'abaque suivant donne le temps de réponse à 5% pour un système du second ordre.



b) Méthode d'identification :

Le principe est le même que pour un système du 1[er] ordre. On impose un échelon d'amplitude E en entrée du système à identifier, on relève la réponse en sortie s(t).

Si on a une réponse pseudo péridodique, on indique que l'on cherchera alors une fonction de transfert sous la forme : $\frac{K}{1+\frac{2m}{w_0}\times p+\frac{1}{{w_0}^2}\times p^2}$:

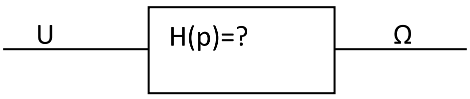
- Calcul de K : $K = \frac{S_\infty}{E}$
- Calcul de m : on relève le 1er dépassement sur le chronogramme de s(t). Puis, on utilise l'abaque permettant de retrouver m.
- Calcul de w_0 : 2 solutions
  - A partir de la valeur de m et de l'abaque du temps de réponse à 5%, on trouve la valeur du produit $w_0.tr_{5\%}$. Puis sur le chronogramme on relève $tr_{5\%}$, afin de calculer ensuite w_0.
  - Utilisation de la formule : $w_0 = \frac{2\pi}{T_n.\sqrt{1-m^2}}$ après de la pseudo-période sur le chronogramme.

B. Identification par essai fréquentiel

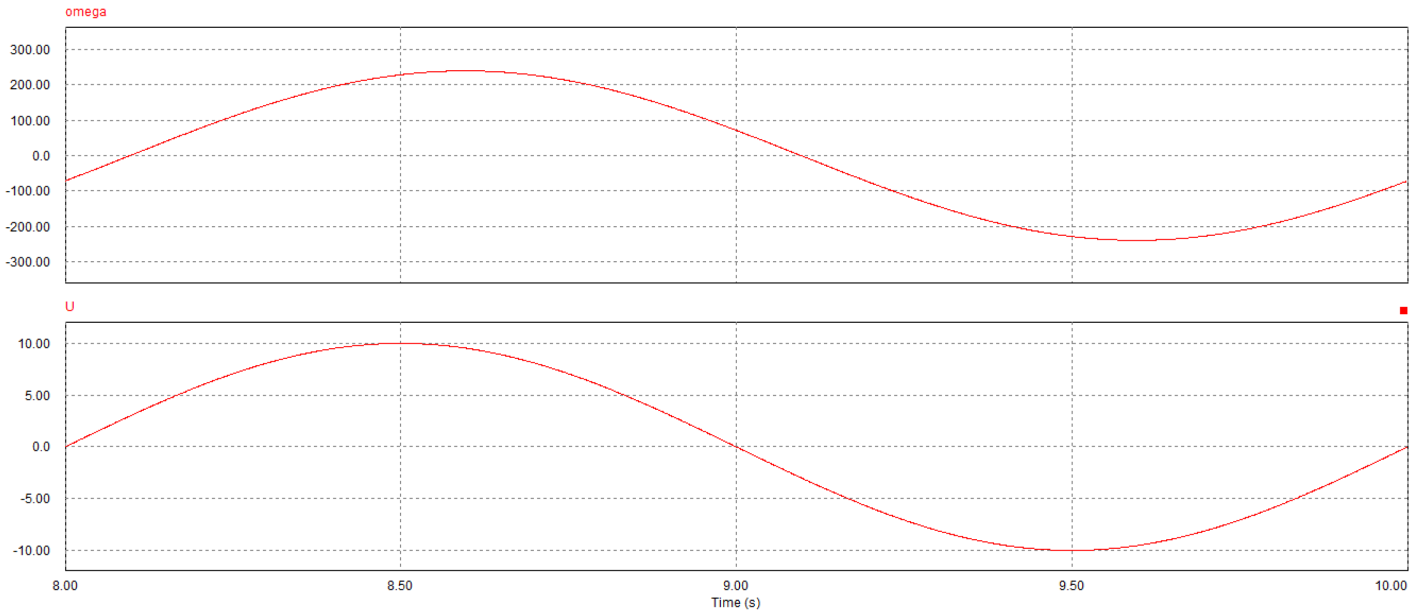
Dans cet essai, on va imposer un signal d'entrée E sinusoïdal pour lequel on fera varier la fréquence (w=2πf). Puis en relevant l'amplitude et le déphasage de la sortie S, on va reconstituer expérimentalement le diagramme de Bode (cf cours annexe tracé de diagramme de Bode) de la fonction de transfert H(jw) = $\frac{S(jw)}{E(jw)}$. Puis, on identifie le diagramme avec une fonction de transfert.

Rq : Le tracé de ces diagrammes fait l'objet d'un cours parallèle afin de pouvoir le consulter plus facilement lors d'une prochaine séance sur le filtrage.

Ex : on veut connaitre la fonction de transfert d'un moteur à courant continu.



Exemple de calcul d'un point du diagramme de Bode : on impose en entrée une tension de fréquence 0,5Hz et d'amplitude 10 V. On a relevé les chronogrammes suivants :



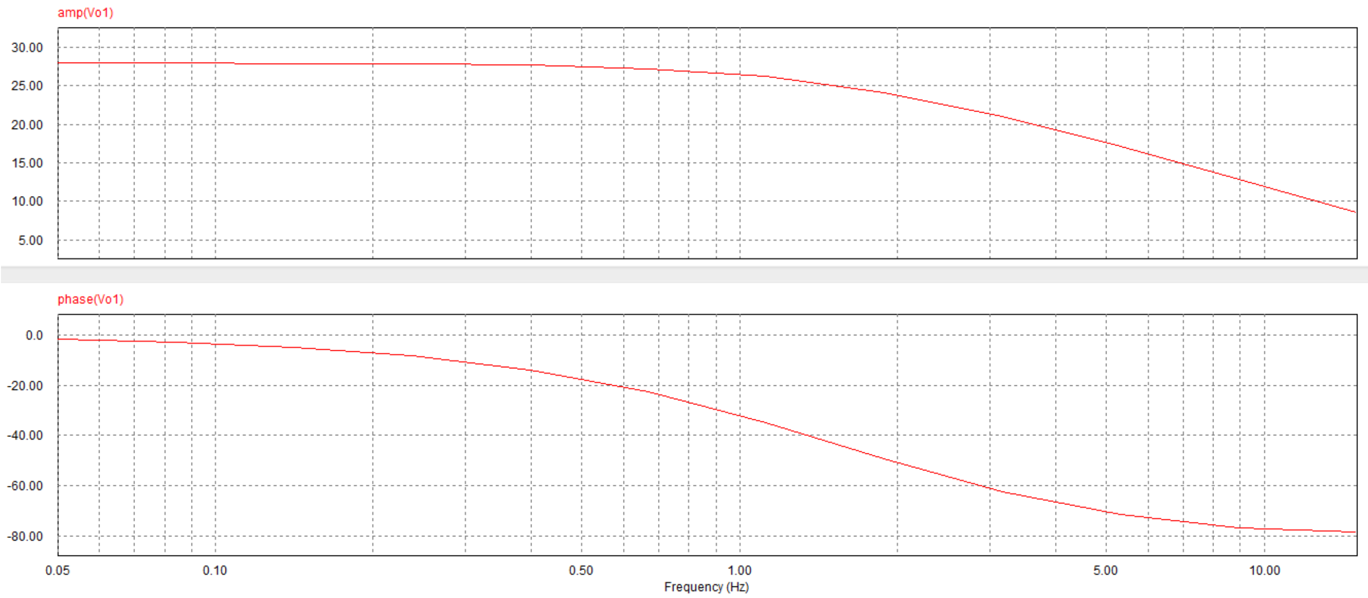
On lit : amplitude de Ω : …… Déphasage de Ω : ……

On peut donc placer sur le diagramme de Bode les points

En gain (0,5 Hz ; … . . . . ……….)

En phase (0,5 Hz ; ………)

On a procédé à plusieurs essais similaires en faisant varier la fréquence de u(t). Ces différents essais permettent alors de reconstituer un diagramme de Bode donné ci-dessous.



Méthode d'identification d'un diagramme de Bode:

- Lecture sur le diagramme de phase des sauts de phase
  - Saut de 90 ° → ....

....

....

....

....

  - Saut de 180 ° → ....

....

....

- Lecture du gain statique de l'asymptote horizontale sur le diagramme de gain :

  ....

  ....

  Rq : une phase démarrant à -90°, avec un diagramme de gain avec un pente de -20 dB/dec signifie que l'on a un intégrateur

Application à l' exemple, fonction de transfert du moteur :